T. N. THIELE

INTERPOLATIONSRECHNUNG

INTERPOLATIONSRECHNUNG

VON

DR. T. N. THIELE
EM. PROFESSOR DER ASTRONOMI AN DER KOPENHAGENER UNIVERSITÄT
PRÄSIDENT DES VEREINS DÄNISCHER AKTUARE

LEIPZIG
COMMISSION VON B. G. TEUBNER
MCMIX

BUCHDRUCKEREI BIANCO LUNO, KOPENHAGEN

VORWORT.

Schon lange betrachtet man die Interpolations-Rechnung als einen Hauptteil der praktischen Mathematik, da sie ja für jede rechnerische Anwendung der Mathematik durchaus unentbehrlich ist.

Dass die I. R. aber auch im Systeme des mathematischen Unterrichts eine wesentliche Rolle spielt, ist bei Weitem nicht so allgemein anerkannt.

Die Tafeln und ihre Interpolation müssen in den Arithmetikstunden der Schulen schon kurz berührt werden; dies geschieht jedoch so oberflächlich, dass es denjenigen, die das Gelernte rechnerisch anwenden wollen, nicht genügt. Eine auf rein elementaren Grundlagen geschriebene I. R. würde in diesem Fall sehr nützlich sein, und wäre überhaupt als systematischer Abschluss des elementaren mathematischen Unterrichts zu empfehlen.

Dass eine solche I. R. Aussicht auf die höheren mathematischen Disciplinen eröffnen und zu weiteren Studien anregen würde, kann wenigstens denjenigen nicht schaden, welche dieser Anregung nicht folgen können.

Andrerseits scheint es auch empfehlenswert, bei weitergehenden mathematischen Studien den Anfang mit der I. R. zu machen, denn die Infinitesimalrechnung und die Theorien der Funktionen und Reihen fussen alle auf Begriffen, welche es verdienen, in der I. R. vorläufig zu reifen.

Wie in der Geometrie die Trigonometrie eine Zentral-Stelle behauptet, so gebührt der Interpolations-Rechnung eine ähnliche Stelle auf der arithmetischen Seite der Mathematik.

Kein uns bekanntes Lehrbuch über Interpolation kann als solches Zwischenglied dienen.

Die Verfasser scheinen es als praktisch anzusehen, sich hauptsächlich auf Tafeln mit äquidistanten Argumenten zu beschränken.

Praktisch ist dies nur im schlechteren Sinne des Wortes; und — eigenthümlicher Weise — zerstört eben diese scheinbare Vereinfachung die elementare Ein-

fachheit der Beweise so sehr, dass der Anschluss an die elementare Arithmetik verfehlt wird.

Newton hat seine allgemeine Interpolationsmethode für beliebige und beliebig geordnete Argumente, so wie seinen dabei verwendeten Begriff von «dividirten Differenzen» als so einleuchtend betrachtet, dass er keinen Beweis geführt hat.

Das vorliegende Buch setzt nicht voraus, dass seine Leser alle so scharfsichtig sind wie Newton. Nach den einleitenden Definitionen wird der elementare Beweis geführt, dass der Begriff der dividirten Differenzen für jede Ordnung seine Gültigkeit behält. Unter sorgfältiger Einübung dieses Begriffes wird dann zuerst daraus die allgemeine Interpolationsformel Newtons mit der exakten Form ihres Restgliedes abgeleitet, ferner die Interpolationsformel von Lagrange.

Durch zwei oder mehrmalige Interpolation zu demselben Argumente lassen sich dividirte Differenzen mit wiederholtem Argumente bestimmen, welche die Koeffizienten der Taylorschen Potenz-Reihe sind. Die hieraus entspringende Infinitesimalrechnung wird nur in ihren Prinzipien besprochen, die weiteren Sätze als von anderswoher bekannt vorausgesetzt. Ausführlich wird aber die numerische Differentiation mittelst Funktionswerte besprochen, welche beliebigen Argumenten entsprechen, so wie Interpolationen, für welche ausser den Funktionswerten auch Differentialquotienten gegeben sind, und numerische Lösung von Gleichungen höheren Grades durch dividirte Differenzen.

Auch für die numerische Ausführung von einfachen und doppelten Integrationen werden Methoden mit beliebiger Wahl von Argumenten gegeben, die es zum Beispiel gestatten, bei astronomischen Störungsrechnungen die Intervalle nach Belieben zu verkleinern oder zu vergrössern, je nach der wechselnden Schwierigkeit der Arbeit.

Nach ausführlicher Besprechung des Spezialfalles von Interpolation mittelst einfacher Differenzen bei Argument-Intervallen von konstanter Grösse wird die Genauigkeit von Interpolation und Extrapolation untersucht.

Was die unendlichen Reihen betrifft, findet in diesem Buch nur teilweise Annäherung an die modernen Theorien dieser Reihen statt. Die Aufgabe, diese mit der Interpolation zu verbinden, wird Anderen überlassen.

Newtons Interpolationsformel bietet eine solche Fülle von unendlichen Reihen mit bekannten Restgliedern, dass darauf in Verbindung mit einigen elementaren Sätzen, eine selbständige Theorie der unendlichen Reihen gebaut werden kann. Schon im ersten Teile giebt das Buch, die Kennzeichen der konvergenten und halbkonvergenten Reihen an. Ein Nachtrag am Ende des Buches führt diese Theorie weiter und enthält Methoden zur Verbesserung von divergenten und langsam konvergenten Reihen.

Dass der Wert einer unendlichen Reihe von dem beabsichtigten Werte verschieden sein kann, wird berücksichtigt.

Der erste Teil des Buches endet mit eindringender Behandlung derjenigen Interpolation, durch welche die Binomreihen und die Exponentialfunktion aus einer Tafel der Potenzen mit ganzen Exponenten einer Grundzahl entstehen.

Der zweite Teil des Buches, der die symbolische Interpolations-Rechnung behandelt, knüpft in einer anderen Weise die I. R. an die elementare Arithmetik, jedoch nicht an die Arithmetik der Zahlen, sondern an die der Symbole. Die Arithmetik der Symbole wird aber im Allgemeinen vernachlässigt. Die Exponenten z. B. werden als Zahlen behandelt, obgleich sie Symbole sind. Deshalb kann diese Anknüpfung an die Elemente nur ausnahmsweise den Lesern in vollem Masse nützlich werden. Die Symbole der I. R. sind aber wie die Exponenten so nahe mit den Zahlen verwandt, dass der Unterschied nur in der Unbestimmtheit der Division besteht (Analogie mit der Mehrdeutigkeit des Wurzelausziehens).

Als abgekürzte Zeichensprache für die Rechnungsvorschriften können die Symbole jedoch ihre höchst wichtigen Dienste leisten.

Dieser Teil des Buches ist also den praktischen Rechnern besonders zu empfehlen, die da eine reiche Sammlung von Formeln finden werden.

Für jede Theorie sind ihre Grenzprobleme besonders beliebt; nicht so für die Praxis, die z. B. verlangen würde, dass alle Interpolationen nach dem Norme der Newtonschen Formel auszuführen wären. Die guten Praktiker werden jedoch erkennen, dass es abnorme Fälle giebt, und für die Warnungen und Hilfsmittel dankbar sein, besonders wenn die Anwendung dieser Mittel zugleich Rechenarbeit ersparen könnte.

Von allen den Hilfs-Methoden, welche der dritte Teil des Buches anbietet, kann vielleicht eine einzige solche strenge Forderungen honoriren: Die graphische Interpolation. Sie ist angenehm und beherrscht die gebrochenen, die irrationalen und mehrdeutigen Funktionen eben so leicht wie die ganzen Funktionen, auf welche sich die Newtonsche Interpolations-Methode im Wesentlichen beschränkt. Leider ist ihre Genauigkeit eine geringe.

Als elementares Gegenstück zu der modernen Funktions-Theorie kann die graphische Interpolation dazu beitragen, solche Kunstgriffe und Transformationen zu entdecken, durch welche schwierige Interpolationen bisweilen sehr erleichtert werden können.

Mehrere der hier mitgeteilten Methoden beschränken sich auf solche Fälle, wo die Ursache der Abnormität nur die allzu kleine Zahl der gegebenen Tafelpositionen ist, und wo man bei kleineren Intervallen der Argumente dieselbe Funktion leicht nach Newtons Formel hätte interpoliren können. Das Vorhanden-

sein von exponentiellen oder kurzperiodischen Gliedern kann solches verursachen, und dagegen ist ein Mittel anzuwenden, welches der Verfasser qualifizierte Differenzen nennt: $f(x+1) - a\,f(x)$.

Am Schluss des dritten Teiles wird die Interpolation mittelst reziproker Differenzen dargestellt. Aus derselben elementaren Grundlage wie die dividirten Differenzen gehen die reziproken Differenzen hervor, und in völlig analoger Weise entspringt aus diesen eine allgemeine Interpolations-Methode in der Form von Kettenbruch, ein Zwillinggebilde der Newtonschen Interpolations-Methode. Eine selbständige Infinitesimalrechnung kann hieraus hervorgehen, besonders eine der Taylorschen Reihe analoge Kettenbruch-Entwickelung. Die Anwendbarkeit der reziproken Differenzen ist unendlich viel weiter ausgedehnt als die der dividirten Differenzen; wie diese sich auf die ganzen Funktionen beschränken, beschränkt sich jene auf die allgemeinsten Formen der gebrochenen Funktionen, endliche oder unendliche. Freilich ist ihre Anwendung auch nicht wenig schwieriger.

Der vierte Teil des Buches behandelt die Interpolation mit Rücksicht auf zwei oder mehrere Argumente. Die Interpolationen zweiter Ordnung bei zwei unabhängigen Argumenten wird sowohl für Rechnung als für Konstruktion ausführlich entwickelt.

Für die Konstruktion von Isobaren und dergleichen Linien wird eine Methode angegeben, mittelst welcher die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden können.

Die Sätze, welche das vorliegende Buch enthält, sind also keineswegs als Glieder einer einzelnen Kette miteinander verknüpft; viele davon kann man überschlagen, ohne das Verständnis des Folgenden zu beeinträchtigen, so z. B. § 10 und § 11 und mehrere Paragraphen im 3. Teil. Dagegen ist es nicht ratsam, die einzelnen Beispiele zu überschlagen, weil man ihrer gerade zum Einüben des im Paragraphen Gesagten nicht bedarf. Einige Beispiele sind zum Mitteilen der feineren Verzweigungen des Stoffes benutzt.

An Zitaten bietet das Buch nur die notwendigsten. Nicht minder als die Leser bedauert der Verfasser diese Sparsamkeit, zu der ihn die Unmöglichkeit alles umfassenden Lesens der Bücher Anderer während der letzten Jahre zwang.

Deshalb kann ich aber auch keinen Anspruch darauf machen, dass das Neue, das die Leser in meinem Buch finden, original sei.

Den Grundgedanken des Buches selbst, dass Newtons allgemeiner Interpolations-Satz ganz elementar bewiesen werden kann, schulde ich meinem hochgeschätzten Lehrer Professor Ludvig Opperman, welcher ihn im «Journal of the Institution of Actuaries and Assurance Magazine» Vol. XV, 1869, mitgeteilt hat, selbst jedoch nicht dazu kam, diesen Fund und seine sonstigen ungewöhnlichen Kenntnisse der älteren englischen Verfasser in einer gesammelten Darstellung der Interpolationsrechnung zu benutzen.

T. N. Thiele.

INHALT.

ZWEITER TEIL.

Symbolische Interpolationsrechnung.

DRITTER TEIL.
Hülfsmethoden.

VIERTER TEIL.
Interpolation nach mehreren Argumenten.

NACHTRAG

betreffend Berechnung des Wertes unendlicher Reihen.

BERICHTIGUNGEN.

S. 49 L. 12 v. o.: Vergleiche Nachtrag §§ 48, 49 und 50.

S. 62 L. 5 v. o.: anstatt Kreissektors lese: Kreissegmentes

S. 66 L. 4 v. o.: anstatt x lese: z

S. 78 L. 9 v. u.: anstatt $\frac{e^{a \log E} - 1}{a} f(x)$ lese: $\frac{e^{a \log E} - 1}{a} \circ f(x)$

S. 79 L. 6 v. u.: anstatt |⟍ lese: ⟍

S. 88 L. 5 v. u.: anstatt (88) lese: (88))

S. 98 in den Formeln (129) und (130) anstatt D^n lese: D^m
und anstatt a^{-n} lese: a^{-m}
und anstatt a^{-2n} lese: a^{-2m}

S. 116 L. 9 v. u.: anstatt (143) lese: (144)

S. 167 L. 3 v. u.: anstatt $1-q$ lese: $1q$

ERSTER TEIL.

§ 1. Definitionen.

Man unterscheidet Zahlen mit bestimmten Werten, Konstanten von denjenigen, deren Werte unbestimmt oder wechselnd gehalten werden, Variabeln.

Unter variabeln Zahlen bestehen Abhängigkeiten, falls eine derselben, die abhängige Variable, berechnet werden kann, wenn gewisse andere, ihre unabhängigen Variabeln, als bekannt angenommen werden. Die abhängige Variable nennt man eine Funktion der entsprechenden unabhängigen Variabeln. Man braucht namentlich das Wort Funktion als Bezeichnung für die Art der Abhängigkeit, für die Rechenregel, nach welcher die abhängige Variable durch die unabhängige, bezw. die unabhängigen Variabeln gefunden wird, z. B. y durch x in $y = (x+3)(x-5)$, oder y durch p, q und x in $y = (x+p)(x-q)$. Das erste Beispiel fällt unter das zweite als spezieller Fall, indem man den unabhängigen Variabeln p und q die konstanten Werte $p = 3$ und $q = 5$ giebt.

Auch die Abhängigkeiten der Massverhältnisse der wirklichen Welt werden mit dem Wort Funktion bezeichnet. Jede Zahl, die zur Bestimmung des Ortes eines beweglichen Körpers dient, ist eine Funktion der Zeit.

Eine Funktion nennt man eindeutig (im Gegensatze zu zwei- oder mehrdeutig), wenn die abhängige Variable nur einen und keine anderen Werte bekommt, indem man jeder ihrer unabhängigen Variabeln einen bestimmten Zahlenwert beilegt. In der Natur herrscht die feste Regel, dass jede Wirkung eine eindeutige Funktion der sämtlichen sie verursachenden Umstände ist.

Unter der Tafel einer Funktion versteht man eine Sammlung von bekannten Werten dieser Funktion mit Angabe der entsprechenden Werte der unabhängigen Variable oder Variabeln, welche die Argumente der Tafel genannt werden.

Bekannte Tafeln mit einem Argument sind die Quadrattafel, die Logarithmentafel und die trigonometrischen Tafeln. Solche werden in Schrift oder Druck immer derart dargestellt, dass man jedes Argument und dessen Funktionswert

dicht nebeneinander stellt, meistens in der Weise, dass die Werte des Arguments in einer Spalte links, die Funktionswerte in einer Spalte rechts ihren Platz bekommen, jeder Wert mit seinem Argument auf derselben Zeile stehend.

Bekannte Tafeln mit zwei Argumenten sind die Additions- und die Multiplikationstabelle. Solche werden am besten in der Weise geordnet, dass das eine Argument in einer Spalte links von der Tabelle, das andere in einer Zeile über derselben angebracht wird. Der den beiden speziellen Argumenten x und y entsprechende Funktionswert $f(x, y)$ wird dahin gestellt, wo die Zeile rechts von dem erstgenannten Argument x die Spalte unter dem letzteren, speziellen Argument y schneidet. Z. B. die Multiplikations-Tabelle

	y	0	1	2	3
x	xy				
0		0	0	0	0
1		0	1	2	3
2		0	2	4	6
3		0	3	6	9

Diese Tafel zeigt ein Beispiel einer *symmetrischen* Funktion, das heisst eine solche, die nicht durch Umtausch der unabhängigen Variabeln geändert wird.

Für Tafeln mit 3 oder mehr Argumenten giebt es keine allgemeine übersichtliche Aufstellungsweise. Eine besondere Ordnung für gewisse solcher Tafeln findet man in § 6 angewandt.

Tafeln mit doppeltem Eingang nennt man solche Tafeln mit einem Argument, welche in der für Tafeln mit zwei Argumenten geschilderten Weise geordnet sind, indem z. B. die Einer des Arguments als das eine Argument, der übrige Teil als das andere aufgefasst worden sind. Beispiele kommen in einigen 5-stelligen und in allen 7-stelligen Logarithmentafeln vor.

Interpolation ist die Kunst zwischen den Zeilen einer Tafel zu lesen. Die Philologen brauchen das Wort zur Bezeichnung dessen, was sich irrtümlicherweise in ein Manuskript beim Abschreiben desselben einschleicht. In der Mathematik bezeichnet Interpolation eine Berechnung, welche von den Angaben einer Tafel ausgehend, zur Bestimmung des Wertes der Tafelfunktion für ein solches Argument führt, das nicht in der Tafel vorkommt. Die Interpolationsrechnung lehrt uns die dazu verwendbaren Interpolations-Metoden.

Es giebt keine für alle Funktionen unbedingt gültige Interpolations-Metode. Andererseits aber wird die nur für wenige und nahe verwandte Funktionen gültige Berechnungsweise nicht «Interpolation» genannt, besonders die Berechnungsweise

nicht, welche die Definition der Funktion ausdrückt. Die Interpolation bekommt eben ihre praktische Bedeutung dadurch, dass sie die definitionsmässige Berechnungsweise der Abhängigkeiten in den Fällen ersetzen kann, in denen diese entweder schwierig wird und z. B. die Anwendung von unendlichen Reihen erfordert, oder in den Fällen, wo die mathematische Form der Abhängigkeit unbekannt ist, wie es im Allgemeinen bei Anwendungen auf Aufgaben der Wirklichkeit, wo die Gesetze nur durch Beobachtungen bekannt sind, der Fall ist.

Durch die Aufstellung einiger sehr umfassenden Interpolations-Metoden und durch die Feststellung der Grenzen der Gültigkeit derselben, trägt die Interpolationsrechnung zur Einteilung der Funktionen bei.

§ 2. Dividirte Differenzen.

Die Behandlung der Interpolation von Funktionen mit Rücksicht auf mehr als ein einziges Argument ist dem letzten Paragraphen des Buches vorbehalten, im Uebrigen beschränken wir uns auf die Behandlung der Interpolation von Tafeln mit nur einem einzigen Argument.

Es wird fast überall in der Hauptsache nur die Rede von einer einzigen Funktion sein, nicht von mehreren, welche man durch verschiedene Funktionsbezeichnungen zu unterscheiden nötig hat. Die Tafelwerte dieser Funktion sind dagegen deutlich von einander zu unterscheiden. Wir bezeichnen dann die Werte der Funktion mit grossen lateinischen Buchstaben und den Wert des einzigen Argumentes jeder Funktion mit den entsprechenden kleinen Buchstaben. $A = f(a)$, $B = f(b)$ .... bezeichnet also die in der Tafel gegebenen Werte der Funktion, und $X = f(x)$ kann den für das Argument x gesuchten Wert derselben Funktion bezeichnen.

Es seien $a, b, c, d, \ldots.$ unter sich verschiedene Argumente, deren Funktionswerte beziehungsweise $A, B, C, D, \ldots.$ aus der Tafel bekannt sind, dann nennt man

$$\frac{A-B}{a-b} = \delta(a, b) = \frac{A}{a-b} + \frac{B}{b-a} = \delta(b, a) \tag{1}$$

die dividirte Differenz für die Argumente a und b. Wie ersichtlich, könnte man $\delta(a, b)$ das Durchschnittssteigen der Funktion im Intervall zwischen a und b nennen. $\delta(a, b)$ ist immer bestimmt und endlich, wenn A und B endliche Zahlen sind. Die dividirte Differenz $\delta(a, b)$ ist die Funktion zweier unabhängiger Variabeln, und zwar eine symmetrische Funktion, die sich nicht ändert, wenn a für b und b für a gesetzt wird. Deshalb können zwei zusammenhängende dividirte Differenzen $\delta(a, b)$ und $\delta(b, c) = \delta(c, b)$ aus derselben Tafel mit einem gemeinsamen Argumente, hier b, als die a und c entsprechenden Werte einer neuen, aus der ersten abgeleiteten,

Funktion betrachtet werden, und aus dieser kann man dann die dividirte Differenz zweiter Ordnung bilden:

$$\delta(a, b, c) = \frac{\delta(a, b) - \delta(b, c)}{a - c} = \frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)}. \quad (2)$$

Es zeigt sich, dass diese eine symmetrische Funktion der drei Argumente a, b und c ist. Folglich kann man aus zwei zusammenhängenden dividirten Differenzen zweiter Ordnung $\delta(a, b, c)$ und $\delta(b, c, d)$, in denen b und c als Konstanten aufgefasst werden, eine dividirte Differenz dritter Ordnung bilden:

$$\delta(a, b, c, d) = \frac{\delta(a, b, c) - \delta(b, c, d)}{a - d} = \sum \frac{D}{(d-a)(d-b)(d-c)}. \quad (3)$$

Dieses Resultat, das zur Bildung von dividirten Differenzen 4ter Ordnung u. s. w. berechtigt, konnte schon vorausgesehen werden, und durch den allgemeinen Induktionsbeweis wird bewiesen, dass die dividirte Differenz $n$ter Ordnung eine symmetrische Funktion von $n+1$ Argumenten ist, und zwar die Summe von deren entsprechenden Funktionswerten, jedem durch das Produkt von den Differenzen dieses Argumentes gegen die übrigen n Argumente dividirt. Wir haben gesehen, dass dieser Satz für die niedrigsten Ordnungen wahr ist; wenn er aber für die $(n-1)$te Ordnung noch gilt, muss er auch für die $n$te gelten.

Die beiden zusammenhängenden dividirten Differenzen

$$\delta(a, b, c, d, e, f, g) = \sum \frac{E}{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-f)(e-g)}$$

und

$$\delta(b, c, d, e, f, g, h) = \sum \frac{E}{(e-b)(e-c)(e-d)(e-f)(e-g)(e-h)}$$

geben als dividirte Differenz nächsthöherer Ordnung

$$\delta(a. b, c, \ldots f, g, h) = \frac{\delta(a, b, c, d, e, f, g) - \delta(b, c, d, e, f, g, h)}{a - h}$$
$$= \sum \frac{E}{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-f)(e-g)(e-h)}, \quad (4)$$

indem besonders die Glieder mit A und H als Zähler nur noch durch beziehungsweise $a-h$ und $h-a$ dividirt werden, während die Differenz der beiden allgemeinen Glieder mit dem Zähler E die $n-1$ gemeinsamen Divisoren behält und infolge

$$\left(\frac{1}{e-h} - \frac{1}{e-a}\right)\frac{1}{h-a} = \frac{1}{(e-a)(e-h)},$$

noch die beiden Divisoren $(e-a)$ und $(e-h)$ erhält.

Beispiel. In einer Tafel sind

$$a = 2, \quad A = 12$$
$$b = 5, \quad B = 24$$
$$c = 3, \quad C = 24$$

und man weiss, dass $\delta(2, 3, 4, 5) = -1$, dann ist in derselben Tafel für $x = 4$, $X = 30$.

Welche Werte haben nach derselben Tafel $\delta(2, 3, 4)$, $\delta(2, 3, 5)$, $\delta(2, 4, 5)$ und $\delta(3, 4, 5)$?

§ 3.

Wenn das Argument x und sein Funktionswert X in der Tafel gegeben sind, werden die dividirten Differenzen, in die x eingeht, bestimmt sein durch

$$\begin{aligned}
(x-a)\,\delta'\,(x, a) &= X - A \\
(x-b)\,\delta''\,(x, \ldots, b) &= \delta'\,(x, a) - \delta'\,(a, b) \\
(x-c)\,\delta'''\,(x, \ldots, c) &= \delta''\,(x, \ldots, b) - \delta''\,(a, \ldots, c) \\
(x-d)\,\delta^{IV}\,(x, \ldots, d) &= \delta'''(x, \ldots, c) - \delta'''(a, \ldots, d)
\end{aligned}$$

u. s. w.

wo die verkürzte Schreibweise z. B. $\delta'''(a, \ldots, d) = \delta(a, b, c, d)$ und $\delta^{IV}(x, \ldots, d) = \delta(x, a, b, c, d)$ benutzt worden ist.

Sucht man nun X für ein Argument x, das in der Tafel nicht vorkommt, erfolgt rein formell

$$\delta''(x, \ldots, b) = \delta''(a, \ldots, c) + (x-c)\left\{\delta'''(a, \ldots, d) + (x-d)\,\delta^{IV}(x, \ldots, d)\right\}$$

$$\delta'(x, a) = \delta'(a, b) + (x-b)\left\{\delta''(a, \ldots, c) + (x-c)\left\{\delta'''(a, \ldots, d) + (x-d)\,\delta^{IV}(x, a, \ldots, d)\right\}\right\}$$

und

$$A + (x-a)\left[\delta'(a, b) + (x-b)\left\{\delta''(a, \ldots, c) + (x-c)\left\{\delta'''(a, \ldots, d) + (x-d)\,\delta^{IV}(x, a \ldots, d)\right\}\right\}\right].$$

Diese Identität (5) stellt die allgemeine Interpolationsformel, Newtons Formel, mit ihrem Restglied

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,\delta^{IV}(x, \ldots, d)$$

dar.

Im weitesten Sinne ist dies nur eine Umschreibung, durch welche die Schwierigkeit beim Finden von X auf die Bestimmung von $\delta^{IV}(x, \ldots, d)$ übertragen wird. Es giebt aber sehr zahlreiche Fälle, in denen man beweisen kann, dass die dividirte Differenz höchster Ordnung $= 0$ ist, oder wo die Tafel selbst begründete Vermutung giebt, dass dies mit hinlänglicher Annäherung der Fall sein muss. In diesem Falle wird die Formel Newtons zur Interpolation brauchbar, da sie sich ohne vollständige Kenntnis der Eigenschaften der Funktion zur Berechnung von Werten anwenden lässt, die in der Tafel nicht vorhanden sind, mit Hilfe derjenigen, die darin ent-

halten sind. Bisweilen kann doch auch das Restglied mit einem von 0 verschiedenen Wert gegeben sein.

Eine Funktion, für die das Restglied $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $= 0$ ist, ohne Rücksicht darauf, von welchen Argumenten es abhängt, und wo deshalb auch jede dividirte Differenz n^{ter} Ordnung konstant ist, wird infolge (5) eine ganze rationale Funktion des n^{ten} Grades sein.

$$X = A + (x-a)\Big\{\delta'(a,b) + (x-b)\{\delta''(a,\ldots,c) + (x-c)\,\delta'''(a,\ldots,d)\}\Big\}. \tag{6}$$

Beispiel. Wenn im Beispiel des § 2 die dritte dividirte Differenz konstant $= -1$ und folglich die $4^{\text{te}} = 0$ ist, wird die Interpolationsformel Newtons geben

$$X = 12 + (x-2)\{4 + (x-5)\,[-4 + (x-3)(-1)]\} = -6 + x + 6x^2 - x^3.$$

§ 4.

Eine ganze rationale Funktion kann auch, insofern nur ihr Grad im voraus bekannt ist, durch ihre Tafelwerte ohne Anwendung von dividirten Differenzen dargestellt werden. Indem wir in (6) nach (1), (2), (3) die Ausdrücke für die dividirten Differenzen einsetzen, sehen wir, dass X als eine Summe von $n+1$ Gliedern, einem Glied mit A, einem mit B, ... und einem mit D als Faktor ausgedrückt werden kann, mit Faktoren multiplizirt, von denen derjenige, welcher dem zuletzt eingeführten Zahlenwert D entspricht, wie unmittelbar ersichtlich

$$D\,\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

ist.

Die übrigen Glieder brauchen wir nicht auszurechnen, denn die Ordnung, in der die Argumente mit ihren Funktionswerten in der Tafel aufgeführt sind, ist gleichgültig, und $\delta(a, b, c, d, x) = 0$ ist eine symmetrische Gleichung. Wir brauchen deshalb nur D gegen A, B oder C und gleichzeitig d gegen a, b oder c umzutauschen, um diese anderen Glieder zu finden. Die Formel, die Interpolationsformel von Lagrange muss dann im Allgemeinen

$$X = \Sigma H\,\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-g)}{(h-a)(h-b)\ldots(h-g)} \tag{7}$$

sein.

Wenn man diese Formel betrachtet, sieht man auch fast unmittelbar, dass sie ihren Bedingungen genügt, indem sie sowohl des n^{ten} Grades ist, als auch für jedes der Argumente den verlangten Wert hat; das Glied mit dem Faktor H wird nämlich $= H$, wenn $x = h$ ist, und $= 0$ für jedes der übrigen n Argumente. Die Interpolationsformel von Lagrange kann man auch leicht aus der geordneten Form $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots . k_n x^n$ für die allgemeine ganze rationale Funktion durch Elimination der Konstanten ableiten. Die Determinante, deren Kolonnen die 0^{ten}

bis n^{ten} Potenzen von $n+1$ Argumenten sind, ist nämlich das Produkt von sämtlichen Differenzen zwischen diesen Argumenten.

Beispiel. Welche Funktion des 4^{ten} Grades ist $= 0$ für die Argumente 1, 2, 3, und $= 1$ für die Argumente 0 und 4?

Antwort: $\frac{1}{12}(x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12)$.

§ 5.

Folgende Sätze betreffs dividirter Differenzen sind besonders zu beachten.

1) Ist die Funktion der Tafel eine Summe von Funktionen $X = f_1(x) + f_2(x)$, wird jede ihrer dividirten Differenzen die Summe der dividirten Differenzen (von derselben Ordnung und von denselben Argumenten) jedes einzelnen Gliedes sein:

$$\delta^n = \delta_1{}^n + \delta_2{}^n.$$

2) Ein konstanter Faktor einer Funktion wird konstanter Faktor ihrer sämtlichen dividirten Differenzen.

3) Wenn alle Argumente einer Tafel durch einen konstanten Addenden geändert werden (den Nullpunkt ändern), ist dies ohne Einfluss auf die dividirten Differenzen.

4) Wenn die Argumente einer Tafel durch Multiplikation mit einem konstanten Einheitsfaktor geändert werden, muss man ihre dividirten Differenzen der n^{ten} Ordnung mit der n^{ten} Potenz des Einheitsfaktors dividiren.

5) Ist $X = x^n$, und n eine positive, ganze Zahl wird

$$\begin{aligned} \delta(a, b) &= a^{n-1} + ba^{n-2} + \ldots\ldots + b^{n-2}a + b^{n-1} \\ \delta(a, b, c) &= a^{n-2} + ba^{n-3} + \ldots\ldots + b^{n-3}a + b^{n-2} + \\ &\quad + ca^{n-3} + \ldots\ldots + cb^{n-4}a + cb^{n-3} + \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad + c^{n-3}a + c^{n-3}b + \\ &\qquad\qquad\qquad + c^{n-2}. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen wird die dividirte Differenz der m^{ten} Ordnung δ^m von x^n, also die Summe von den sämtlichen $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ unter sich verschiedenen Produkten von den Potenzen der Argumente, in denen die Summe der Exponenten $= n - m$ ist. Die $(n-1)^{\text{te}}$ dividirte Differenz von x^n ist die Summe von den n Argumenten, die n^{te} dividirte Differenz ist $= 1$, alle von höherer Ordnung $= 0$.

6) Ist X eine ganze rationale Funktion des n^{ten} Grades, ist die dividirte Differenz der m^{ten} Ordnung $(m < n)$ eine ganze rationale symmetrische Funktion des $n{-}m^{\text{ten}}$ Grades; die $n{-}1^{\text{te}}$ dividirte Differenz ist eine lineare Funktion der Summe der n Argumente, die n^{te} ist konstant $=$ dem Faktor des Gliedes des n^{ten} Grades, alle höheren dividirten Differenzen sind $= 0$.

7) Für die reziproke Funktion $X = \frac{1}{x}$ sind die dividirten Differenzen auch besonders einfach, $\delta(a, b) = \frac{-1}{a \cdot b}$, $\delta(a, b, c) = \frac{1}{a \cdot b \cdot c}$, $\delta(a, b, c, d) = \frac{-1}{a \cdot b \cdot c \cdot d}$ u. s. w., im Allgemeinen $\delta^{(2n)} = \frac{+1}{P_{2n+1}}$, $\delta^{(2n+1)} = \frac{-1}{P_{2n+2}}$, P_m ist das Produkt der sämtlichen m Argumente.

8) Wenn der Funktionswert durch seine unabhängige Variable eindeutig bestimmt ist, werden die dividirten Differenzen seiner Tafel auch eindeutig bestimmt und damit das Resultat einer Interpolation nach der Formel Newtons.

Für zwei- oder mehrdeutige Funktionen kann zwar auch die Rede von Interpolation sein. Dabei muss aber streng unterschieden werden zwischen den einzelnen Zweigen der Funktionen, von denen jeder in seinem Verlauf einer eindeutigen Funktion ähnlich sein muss, und in eine Tafel, die zum Interpoliren angewandt werden soll, muss es einfach verboten werden, andere Werte aufzunehmen als solche, die zu demselben Zweig gehören.

Beispiel. Welches ist die dividirte Differenz der 3^{ten} Ordnung für die Argumente 3, 5, 7 und 11 der Funktion $X = 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x + 10 + \frac{96}{x-9} + \frac{2304}{x+1}$?

Antwort: $\delta(3, 5, 7, 11) = 80$.

Jede dividirte Differenz lässt sich als das Verhältnis zweier Determinanten darstellen.

Man kann immer $n+1$ Werte einer beliebigen Funktion durch eine Funktion n^{ten} Grades ihrer tatsächlichen Argumente ausdrücken. So sind z. B.

$$\begin{aligned} A &= k_0 + k_1 a + k_2 a^2 + k_3 a^3 \\ B &= k_0 + k_1 b + k_2 b^2 + k_3 b^3 \\ C &= k_0 + k_1 c + k_2 c^2 + k_3 c^3 \\ D &= k_0 + k_1 d + k_2 d^2 + k_3 d^3 \end{aligned}$$

darstellbar. Bildet man mit beiden Seiten dieser Gleichungen die dividirte Differenz n^{ter} (3^{ter}) Ordnung ergiebt sich

$$\delta(a, b, c, d) = k_3.$$

Bestimmt man aber k_3 durch Elimination mittelst Determinanten ergiebt sich

$$k_3 = \begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & A \\ 1, & b, & b^2, & B \\ 1, & c, & c^2, & C \\ 1, & d, & d^2, & D \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \delta(a, b, c, d).$$

Dieselbe Form bewährt sich für den allgemeinen Fall. Weil die Determinante im Nenner so wie die A, B, C und D entsprechenden Unterdeterminanten des Zählers bekanntlich Produkte von Differenzen sämtlicher Argumente sind, stimmt dieser Ausdruck der dividirten Differenzen mit (4). Aus ihm ergiebt sich auch (7) durch $\delta(a, b, c, d, x) = 0$.

§ 6.

Mittelst einer Tafel, die m Argumente umfasst, kann man $\frac{1}{2}(m-1)m$ dividirte Differenzen der ersten Ordnung, $\frac{m!}{r!\,(m-r)!}$ der $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bilden; so grosse Mengen braucht man nicht, und sie alle in eine Tafel aufzunehmen, würde unausführbar sein. In jeder Tafel muss man ja aber die Argumente in irgend einer Ordnung schreiben; in der Praxis wählt man fast immer die natürliche Reihenfolge der Argumente als diejenige, in der man es vermeidet, mit überflüssig grossen Zahlen zu rechnen. Es genügt für alle Interpolation, diejenigen dividirten Differenzen zu bilden, deren Argumente in der Tafel unmittelbar aufeinander folgen, welche Ordnung die Argumente auch haben, und diese dividirten Differenzen finden alle einen natürlichen Platz in Spalten, die der Tafel hinzugefügt werden, diejenigen der 1^{sten} Ordnung z. B. unmittelbar rechts von den Funktionswerten und in die Zwischenräume der beiden verschoben, mit denen sie ein Argument gemeinsam haben, hinter ihnen ebenfalls die dividirten Differenzen der 2^{ten} Ordnung u. s. w.:

Argument	Funktion	$\underbrace{\delta'}$	$\underbrace{\delta''}$	$\underbrace{\delta'''}$	$\underbrace{\delta^{IV}}$
a	A				
		$\delta(a, b)$			
b	B		$\delta(a, b, c)$		
		$\delta(b, c)$		$\delta(a, b, c, d)$	
c	C		$\delta(b, c, d)$		$\delta(a, b, c, d, e)$
		$\delta(c, d)$		$\delta(b, c, d, e)$	
d	D		$\delta(c, d, e)$		
		$\delta(d, e)$			
e	E				

Jede dividirte Differenz zeigt durch ihren Platz, dass sie von den Argumenten abhängig ist, die zwischen den auf- und absteigenden schrägen Linien liegen, welche von ihr ausgehen, und man kennt sie so ohne nähere Formelbezeichnung, welche Platz einnehmen würde und deshalb in allen Zwischenrechnungen und Tafeln vermieden werden muss.

Zur Einübung der Interpolation nach diesem Schema infolge der Formel Newtons geben wir hier die Tafel der 4^{ten} Potenzen der Primzahlen mit dividirten Differenzen:

x	x^4	δ'	δ''	δ'''	δ^{IV}
1	1				
		15			
2	16		25		
		65		11	
3	81		69		1
		272		17	
5	625		154		1
		888		26	
7	2401		362		1
		3060		36	
11	14641		650		1
		6960		48	
13	28561		1130		1
		13740		60	
17	83521		1610		1
		23400		72	
19	130321		2330		1
		37380		88	
23	279841		3386		1
		71240		102	
29	707281		4610		1
		108120		120	
31	923521		6290		1
		158440		138	
37	1874161		7946		1
		237900		152	
41	2825761		9770		1
		296520		168	
43	3418801		11450		
		365220			
47	4879681				

hier ist z. B. $888 = \delta(5, 7)$, $4610 = \delta(23, 29, 31)$ und $60 = \delta(11, 13, 17, 19)$.

Wenn man mittelst einer solchen Tafel Interpolation ausführen will, empfiehlt es sich die Argumente so zu wählen, dass man mit möglichst kleinen Zahlen rechnet; dies ist von besonderer Wichtigkeit, wenn die Rechnung approximativ sein soll. Man muss dann a zum Einsetzen in die Formel Newtons

$$X = A + (x-a)\,(\delta(a,b) + (x-b)\,(\delta(a,b,c) + (x-c)\,(\delta(a,b,c,d) + (x-d)\,\delta^{IV})))$$

so nahe an x wie möglich wählen, danach b als dasjenige Nachbarargument, dessen Differenz gegen x den numerisch nächstkleinsten Wert hat; in derselben Weise wählt man erst c und dann d; das 5te Argument ist gleichgültig, wenn δ^{IV}, wie hier, konstant ist. Damit ist es dann gegeben, welche dividirten Differenzen man anwenden soll; sie werden im Allgemeinen eine Zigzaglinie von der Stelle des Arguments aus zeichnen. Die Rechnung ist immer mit den dividirten Differenzen der höchsten Ordnung anzufangen, und die Tafel kann so umgestellt werden, dass die ausgewählten Differenzen in einer aufsteigenden schrägen Linie geschrieben werden als der Anfang einer neuen Tafel, die von rechts gegen links gerechnet wird, und später von oben abwärts ausgefüllt wird, wenn für mehrere Argumente interpolirt werden soll, z. B. für die Werte 30^4 bis 40^4.

37	—				
		—			
23	—		—		1
		—		120	
31	—		4610		1
		108120		113	
29	707281		5401		1
		102719		121	
30	810000		5401		1
		113521		122	
31	923521		5767		1
		125055		126	
32	1048576		6145		1
		137345		130	
33	1185921		6535		1
		150415		134	
34	1336336		6937		1
		164289		138	
35	1500625		7351		1
		178991		142	
36	1679616		7777		1
		194545		146	
37	1874161		8215		1
		210975		150	
38	2085136		8665		1
		228305		154	
39	2313441		9127		1
		246559		158	
40	2560000		9601		
		265761			
41	2825761				

Kontrolle ergiebt sich durch die Neuberechnung der in der Tafel vorkommenden Werte. Ein Beispiel kann die Wichtigkeit der dividirten Differenzen und der Formel Newtons zeigen, als das empfehlenswerteste Hilfsmittel um aus einzelnen Beobachtungen eine vollständige Tafel über den Verlauf der beobachteten Erscheinung zuwegezubringen. Eine Fallmaschine, von der man voraussetzt, dass sie die Falltiefe als eine Funktion des zweiten Grades mit Rücksicht auf die Zeit giebt, hat nach dem Verlaufe von 1, 5 und 7 Sekunden die Falltiefen von beziehungsweise 1, 15 und 28^{cm} gezeigt. Um eine vollständige Tafel über den Fall in den ersten 8^s zuwegezubringen, genügt folgende Rechnung.

t	f		
1	1		
		3·5	
5	15		0·5
		6·5	
7	28		0·5
		8·0	
8	36		0·5
		7·5	
6	21		0·5
		5·5	
4	10		0·5
		4·0	
3	6		0·5
		3·0	
2	3		0·5
		1·5	
0	0		

Gilt es nur einen einzelnen Wert einer Tafel zu interpoliren, empfiehlt es sich den Wert und die dividirten Differenzen, welche aus der Tafel entnommen werden,

mit dem Zwischenraum einer Zeile aufzuschreiben, den Funktionswert zu unterst, darüber die 1ste, dann die 2te, die 3te Differenz und zuoberst die vierte und höchste; links von den leeren Zwischenräumen schreibt man die Argumente oder wenigstens ihre Differenzen $x-n$ als Faktor derjenigen Zahlen, mit denen die Zwischenräume allmählich von oben abwärts ausgefüllt werden. Z. B. für $x = 10$ in Tafel pag. 10.

		$1 = \delta^{IV}$
$d = 5$	5	$1 = \delta^{IV}$
		$36 = \delta(11, 7, 13, 5)$
$c = 13$	-3	$41 = \delta(10, 11, 7, 13)$
		$650 = \delta(11, 7, 13)$
$b = 7$	3	$527 = \delta(10, 11, 7)$
		$3060 = \delta(11, 7)$
$a = 11$	-1	$4641 = \delta(10, 11)$
		$14641 = 11^4$
$x = 10$		$10000 = 10^4$

Als zweites Beispiel berechnet man 20^4 auf doppelte Weise zur gegenseitigen Kontrolle. Die Argumente werden hier nur durch ihre Differenzen gegen 20 angezeigt.

7	1	—9	1
	72		88
—3	79	3	79
	2330		2330
3	2093	1	2567
	23400		37380
1	29679	—3	39947
	130321		279841
	160000		160000

Analoges Aufschreiben (mit zwei bis drei leeren Zwischenräumen) kann angewandt werden, wenn Logarithmen zu den Multiplikationen benutzt werden sollen.

§ 7.

Die Voraussetzungen zur Ausfüllung einer Tafel mit dividirten Differenzen waren, dass die Funktionswerte A, B, ... endlich und eindeutig, die Argumente a, b, ... untereinander verschieden seien. Dies letztere war notwendig, um die Unbestimmtheit zu vermeiden, die sonst alle dividirten Differenzen treffen würde, in die dasselbe Argument zweimal oder häufiger einginge, bei Berechnung nach (4).

Sind aber die in § 3 genannten allgemeinen Bedingungen erfüllt, kann man ohne Unbestimmtheit auch zu einem der in der Tafel gegebenen Argumente interpoliren. Bei der Zurückrechnung von der bekannten dividirten Differenz der höchsten Ordnung kommen nur Multiplikationen und Additionen oder Subtraktionen mit endlichen Zahlen vor, wodurch keine Unbestimmtheit und auch keine unendlichen Grössen eingeführt werden können. Dass diese Zurückrechnung auch dividirte Differenzen geben kann, die von demselben Argument zweimal abhängig sind, sieht man z. B. daraus, dass das Argument 31 in der Tafel pag. 11 keine Unbestimmtheit in $\partial(31, 29, 30, 31) = 121$ hervorruft.

Wiederholt man ohne Dazwischenkunft anderer Argumente eine Interpolation zu demselben Argument, indem man die bei der ersten Interpolation gefundenen dividirten Differenzen benutzt, bekommt man solche, die zwei- und mehrmals von demselben Argument abhängig sind; setzt man in derselben Weise fort, bekommt man zuletzt solche dividirten Differenzen, die ausschliesslich von einem Argument abhängig sind oder, wie man sie nennt, dividirten Differenzen mit wiederholtem Argument.

Beispiel. Aus den 4ten Potenzen der Primzahlen 1, 2, 3, 5, 7 ist das vollständige Schema berechnet; damit wird fünfmal nacheinander zu 10 und darauf wieder fünfmal zu x interpolirt.

1	1				
		15			
2	16		25		
		65		11	
3	81		69		1
		272		17	
5	625		154		1
		888		25	
7	2401		329		1
		2533		32	
10	10000		489		1
		4000		37	
10	10000		600		1
		4000		40	
10	10000		600		1
		4000		40	
10	10000		600		1
		4000		$30+x$	
10	10000		$300+20x+x^2$		1
		$1000+100x+10x^2+x^3$		$20+2x$	
x	x^4		$100+20x+3x^2$		1
		$4x^3$		$10+3x$	
x	x^4		$6x^2$		1
		$4x^3$		$4x$	
x	x^4		$6x^2$		1
		$4x^3$		$4x$	
x	x^4		$6x^2$		
		$4x^3$			
x	x^4				

Der bestimmte Wert, den die Tafel, wenn ein $\partial(a, \ldots d, x)$ bekannt ist, für die 1ste dividirte Differenz $\partial(d, x)$ giebt, und durch welchen x interpolirt wird, ist immer das durchschnittliche Steigen der Funktion zwischen den Argumenten

d und x; der bestimmte Wert, den man durch dieselbe Rechnung für die 1ste dividirte Differenz mit wiederholtem Argument erhält, ist der Grenzwert, dem sich das Mittelsteigen nähert, wenn sich die Argumente dem Zusammenfallen nähern, welches die Definition des ersten Differentialquotienten der Funktion ist, also

$$\delta(x, x) = \frac{dX}{dx}. \tag{8}$$

Die zweite dividirte Differenz mit wiederholtem Argument ist die Hälfte des zweiten Differentialquotienten. Um durch dividirte Differenzen einer Tafel den Übergang von $\delta(x, x)$ zu $\delta(x', x')$ zu machen, muss man ein Mittelglied $\delta(x, x')$ einschalten und

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \left(\frac{\delta(x', x') - \delta(x, x)}{x' - x}\right)_{x'=x} = \left(\frac{\delta(x', x') - \delta(x', x)}{x' - x} + \frac{\delta(x', x) - \delta(x, x)}{x' - x}\right)_{x'=x} = 2\delta(x, x, x) \tag{9}$$

Im Allgemeinen ist die n^{te} dividirte Differenz mit wiederholtem Argument $\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}$ des n^{ten} Differentialquotienten

$$\frac{d^nX}{dx^n} = n!\, \delta^n(x). \tag{10}$$

Zwischen $\delta^n(x)$ und $\delta^n(x')$ schaltet man die n Mittelglieder ein

$$\delta(x, x, \ldots, x, x')\ \delta(x, x, \ldots, x', x')\ \ldots\ldots\ \delta(x, x', \ldots, x', x')$$

und bildet daraus durch Division mit $x'-x$ $n+1$ dividirte Differenzen, welche alle für $x' = x$ gleich $\delta^{(n+1)}(x)$ werden, also $\frac{d\,\delta^n(x)}{dx} = (n+1)\,\delta^{n+1}(x)$.

Dieser Unterschied zwischen $\delta^n(x)$ und $\frac{d^nX}{dx^n}$ liegt also darin, dass die dividirte Differenz mit wiederholtem Argument $\delta^n(x)$ eben so wohl als $\delta^n(x \ldots z)$ als Funktion von $n+1$ Argumenten aufgefasst werden muss, während der Differentialquotient $\frac{d^nX}{dx^n}$ als Funktion einer unabhängigen Variablen aufgefasst wird, und die Ableitung $\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}}$ von $\frac{d^nX}{dx^n}$ ist dieselbe Operation wie die Ableitung $\frac{dX}{dx}$ von X und kann durch dieselbe symbolische Multiplikation $D^{n+1} = D_0 D^n$ bezeichnet werden.

Die Differentialrechnung entspringt also natürlich und notwendig aus der Interpolationsrechnung und kann auf dieser als Grundlage aufgebaut werden. Besonders kann eine grosse Menge der wichtigsten Sätze der Differentialrechnung leicht von dem abgeleitet werden, was oben in § 5 von den allgemeinen dividirten Differenzen gesagt worden ist; man kann zum Beispiel die Sätze von den Differentialquotienten ganzer rationaler Funktionen und von denen der reziproken Funktion beweisen, und einige weitere Beiträge sollen im folgenden gegeben werden, die aus der Interpolationsrechnung unmittelbar entspringen. Um die einheitliche

Begrenzung dieses Buches nicht zu stören, setzen wir sonst voraus, dass die wichtigsten Ergebnisse der Differentialrechnung aus anderen Lehrbüchern bekannt sind.

Beispiel. In einer Tafel, die für die Argumente 2, 4, 5 und 6 die Funktionswerte beziehungsweise 30, 15, 12 und 10 giebt, und von der vorausgesetzt wird, dass sie der Funktion $\frac{60}{x}$ entspricht, bestimmt man durch Interpolation den Funktionswert für das Argument 10 (oder —1) und die dazu gehörigen Differentialquotienten (Merke den Schluss des § 5).

— 1	—60	—60	—60	—60
2	30	30	30	30
4	15	— 7·5	— 7·5	— 7·5
5	12	— 3	1·5	1·5
6	10	— 2	·5	— ·25
10	6	— 1	·2	— ·05
10	6	— ·6	·1	— ·02
10	6	— ·6	·06	— ·01
10	6	— ·6	·06	— ·006

§ 8.

Zu Interpolation kann man eben so wohl wiederholte als unter sich verschiedene Argumente benutzen, und setzt man in Gleichung (5) $a = b = c = d$ bekommt dieselbe die Form:

$$X = A + (x-a)\,\delta'(a) + (x-a)^2\delta''(a) + \ldots + (x-a)^n\delta^n(a) + (x-a)^{n+1}\delta^{(n+1)}(a, a, \ldots, a, x), \quad (11)$$

die mit Bezug auf (10) die Taylorsche Reihe mit der exakten Form des Restgliedes ist, in dem die dividirte Differenz, welche es enthält, von $n+1$ wiederholten Argumenten $= a$ und einem Argument $= x$ abhängig ist.

Durch die Berechnung der dividirten Differenzen für das wiederholte Argument a, berechnet man die Koefficienten der Reihenentwickelung der Funktion nach Potenzen von $(x-a)$.

Interpolation nach der Formel Newtons hat Gültigkeit für eine Funktion unter denselben Voraussetzungen, die für die Taylorsche Reihe gelten und die nötig sind, damit die Funktion und alle ihre Differentialquotienten differentiirt werden können.

Beispiel 1. Von einer Funktion $f(x)$ ist gegeben, dass $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f(2) = 16$ sowie auch, dass ihr Differentialquotient die Werte $f'(0) = 0$ und $f'(2) = 32$ hat. Diese Daten genügen für die Bestimmung einer Funktion des 4ten

Grades, und unter Voraussetzung, dass alle dividirten Differenzen 5$^{\text{ter}}$ Ordnung $= 0$ sind, wird die Funktion bestimmt, und besonders ihr Wert und die Werte ihrer Differentialquotienten für die Argumente 0 und 3

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	3	1
0	0	1	7	5	1
1	1	15	17	8	1
2	16	32	33	10	1
2	16	65	43	11	1
3	81	108	54	12	1
3	81	108	54	12	
3	81	108	54		
3	81	108			
3	81				

Da $\delta(0, 0, 1, 2, 2) = 1$, ist der 4$^{\text{te}}$ Differentialquotient konstant $= 24$, und da der 2$^{\text{te}}$ und der 3$^{\text{te}}$ Differentialquotient für $x = 0$ verschwinden, ist die Funktion $x^4 = 81 + (x-3) \cdot 108 + (x-3)^2 \cdot 54 + (x-3)^3 \cdot 12 + (x-3)^4$.

Beispiel 2. Man kann durch Interpolation eine Logarithmentafel konstruiren, wenn man nur die natürlichen Logarithmen zu 2, 3 und 5 mit ein Paar Dezimalstellen mehr kennt, als man von seiner Tafel fordert. Durch lauter Additionen kann man aus diesen eine Tafel für alle die Argumente bilden, die keine anderen Primfaktoren als diese 3 Zahlen haben. Die Interpolation durch die dividirten Differenzen derselben, würde doch recht mühsam sein, sie wird aber bedeutend erleichtert, wenn man Differentialquotienten in sie aufnimmt, und diese werden ja für die natürlichen Logarithmen sehr leicht berechnet durch $\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{d^2lx}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$ u. s. w. Das Stück zwischen den Argumenten 450 und 540 wird mit Auslassung überflüssiger Wiederholungen sein:

Mit $l2 = 0{\cdot}6931471806$, $l3 = 1{\cdot}0986122885$ und $l5 = 1{\cdot}6094379125$ ist für

450	6·10924758	·0022222222	— ·00000236461	·000000003320	— ·0000000000052
		21512840	226502	3133	49
480	6·17378610	20833333	215222	2958	44
		20704200	213447	2870	45
486	6·18620862	20576132	207706	2779	38
		20285343	203816	2726	42
500	6·21460810	·0020000000	— .00000200000	·000000002667	— ·0000000000040

500	6·21460810	·0020000000	— ·00000200000	·000000002667	— ·0000000000040
					38
				2622	
			196854		44
		19763775		2569	
			193771		35
512	6·23832463	19531250		2429	
			184055		— ·0000000000034
		19015896		·000000002293	
			— ·00000177635		
540	6·29156914	·0018518519			

Will man z. B. $l7$ bestimmen, kann dies vorzugsweise geschehen durch $l448 = 6{\cdot}10479323$, $l490 = 6{\cdot}19440539$, $l504 = 6{\cdot}22257627$, und $l525 = 6{\cdot}26339826$ durch Subtraktion beziehungsweise von $6l2$, $l2+l5$, $3l2+2l3$ und $l3+2l5$, welche mit völliger Übereinstimmung $l7 = 1{\cdot}94591015$ geben. ($l11 = 2{\cdot}3978953$, $l13 = 2{\cdot}5649494$).

Beispiel 3. Eine Tafel gibt für jedes Argument x_r sowohl den Funktionswert y_r als den ersten Differentialquotienten desselben z_r. Die Funktion hat einen so ebenen Verlauf, dass es für die Interpolation innerhalb jedes Intervalls genügt, die Angaben für den Anfang des Intervalls x_0, y_0, z_0 und für dessen Schluss x_1, y_1, z_1 zu benutzen. Welche Werte $y_{\frac{1}{2}}$ und $z_{\frac{1}{2}}$ wird man infolgedessen der Mitte des Intervalls $x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_0+x_1)$ entsprechend finden?

Die dritte dividirte Differenz $\delta(x_0, x_0, x_1, x_1) = \dfrac{(x_1-x_0)(z_1+z_0)-2(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)^3}$ darf man dann für konstant im ganzen Intervall ansehen, und

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{y_1+y_0}{2} - \frac{(x_1-x_0)\,(z_1-z_0)}{8}, \qquad z_{\frac{1}{2}} = \frac{z_1+z_0}{2} - \tfrac{3}{4}(x_1-x_0)^2\delta(x_0, x_0, x_1, x_1).$$

§ 9.

Bei jeder versuchsweisen Lösung einer numerischen Gleichung wird man nach der Natur der Sache die allmählich gewonnenen, jedes für sich unbefriedigenden, Resultate in eine Tafel sammeln, die, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ ist, den Wert von $f(x)$ für die untersuchten Argumente zeigt, und durch hypothetische oder umgekehrte Interpolation wird man hieraus einen solchen Wert von x suchen, von dem man erwarten darf, dass er den entsprechenden $f(x)$ sich noch mehr 0 nähern lassen wird, wenn er nicht selbst die gesuchte Wurzel ist (Regula falsi). In der Regel wird man zu der umgekehrten Interpolation, welche die hypothetischen Argumente geben soll, nur Interpolation rücksichtlich der ersten Differenz allein anwenden, und das kann auch genügen, wenn man sich der Wurzel so sehr genähert hat, dass die Quadrate der Abweichungen als $= 0$ betrachten werden können. Findet man durch solche Überschlagsrechnung die Wurzel selbst nicht gleich, kann man doch erwarten, sich ihr noch mehr zu nähern.

Mit Bezug auf ganzen algebraischen Gleichungen kommen hierzu besondere Vorteile des Interpolationsrechnens: Die Koefficienten der geordneten Gleichung können als dividirte Differenzen für 0 als wiederholtes Argument direkt aufgeschrieben werden. Die Berechnung der Werte für andere Argumente kann durch dividirte Differenzen allmählich weiter geführt werden, so dass die dividirten Differenzen der vorhergehenden Interpolation in der nächsten benutzt werden, besonders wenn nur eine oder wenige Ziffern jedesmal variirt werden, und schliesslich kann man, wenn man sich dem Funktionswerte 0 genähert hat, die Interpolation für das letzte Argument a wiederholen und die Funktion nach Potenzen von $(x-a)$ entwickeln, deren 2 bis 3 ersten Glieder als eine Gleichung des 1sten oder 2ten Grades gelöst, eine verhältnismässig gute Annäherung zur weiteren Bestimmung der Wurzel geben werden. Die Gleichung des 2ten Grades zu benutzen, wird wichtig sein, wenn man sich nicht einer, sondern zweier ganz oder beinahe zusammenfallenden Wurzeln nähert.

Sucht man z. B. die Wurzeln der Gleichung

$$X = 9025 - 3344x + 404x^2 - 16x^3 = 0,$$

leitet man die Rechnung durch unmittelbares Aufschreiben der obersten schrägen Linie ein, woraus sich dann die folgende Tafel entwickelt:

x	X			
				—16
			404	
		—3344		—16
0	9025		356	
		—2276		—16
3	2197		276	
		— 896		—16
5	405		180	
		— 356		—16
6	49		130·4	
		— 212·56		—16
6·1	27·744		111·2	
		— 190·32		—16
6·2	8·712		108·0	
		— 179·52		—16
6·2	8·712		105·6	
		— 174·24		—16
6·25	0		104·8	
		— 169		—16
6·25	0		104	
		— 169		—16
6·25	0		88	
		— 81		—16
7·25	—81		56	
		+ 31		—16
8·25	—50		8	
		+ 47		—16
9·25	— 3		— 24	
		+ 23		—16
9·25	— 3		— 40	
		+ 23		—16
9·25	— 3		— 44	
		+ 12		—16
9·5	0		— 48	
		0		—16
9·5	0		— 52	

Nachdem der erste Wert für $f(6{\cdot}2) = 8{\cdot}712$ die Nähe der Wurzel gezeigt hat, hätte der Gebrauch der dividirten Differenz $= -190{\cdot}32$ die Hypothese gegen $x = 6{\cdot}245$ geleitet. Durch die Wiederholung des Argumentes $6{\cdot}2$ werden wir zum richtigen Griff, $x = 6{\cdot}25$ geführt. Durch die drei Werte für $f(9{\cdot}25)$ führt uns die Gleichung des zweiten Grades $0 = 3 - 23y + 40y^2$ zum Wurzelpaare $y = \frac{3}{8}$ und $y = \frac{1}{5}$. Um diese zu unterscheiden, nehmen wir $y = \frac{1}{4}$, also $x = 9{\cdot}25 + 0{\cdot}25$, was die doppelte Wurzel $x = 9{\cdot}5$ selbst trifft.

Die Entwickelung $X = -169(x - 6{\cdot}25) + 104(x - 6{\cdot}25)^2 - 16(x - 6{\cdot}25)^3$ zeigt, dass $6{\cdot}25$ eine einzelne Wurzel ist, und gibt die Gleichung an, aus der die andern Wurzeln gefunden werden können; hier haben wir es vorgezogen, die Tafel zum unmittelbaren Nachweis derselben fortzusetzen; dadurch zeigt sich $x = 9{\cdot}5$ als eine doppelte Wurzel, indem die Entwickelung

$$X = -52(x - 9{\cdot}5)^2 - 16(x - 9{\cdot}5)^3$$

ist.

Als Metode zur Bestimmung der reellen Wurzeln mit allmählich steigender Genauigkeit ist diese Interpolationsmetode eine der besten. Nur Gräffe's Metode, die Gleichung zu derjenigen umzubilden, deren Wurzeln die Quadrate (4te, 8te... Potenz) der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, hat vor der hier beschriebenen den ausgemachten Vorzug, dass die Bestimmung imaginärer Wurzeln keine wesentlich grösseren Schwierigkeiten verursacht. Durch die Interpolationsmetode wird man zwar dazu geführt, einige Zahlen aufzuschreiben, die nicht durchaus notwendig sind; sie hat aber andererseits den grossen Vorzug, dass sie ein Rechenschema anwendet, von dem man voraussetzen kann, dass es durch seine vielen anderen Anwendungen sich so fest ins Gedächtnis gesetzt hat, dass es zur Verfügung steht, so oft man wünscht, eine Gleichung von höherem als dem 2ten Grade mit Bezug auf ihre reellen Wurzeln zu lösen.

Auf einfaches Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln angewandt, zeigt sich die Interpolationsweise auf die gewöhnliche Rechenweise zurückzufallen, nur mit etwas geänderter Aufstellung. Dies wird sich aus den folgenden Beispielen ergeben:

x	$17^6 - x^2$		
			−1
		0	
0	24137569		−1
		−4000	
4000	8137569		−1
		−8900	
4900	127569		−1
		−9810	
4910	29469		−1
		−9823	
4913	0		

x	$17^6 - x^3$			
				−1
			0	
		0		−1
0	24137569		−200	
		−40000		−1
200	16137569		−480	
		−174400		−1
280	2185569		−769	
		−242841		
289	0			

Man vermeidet zweistellige Multiplikationen und erleichtert das Raten beim Ausziehen der Kubikwurzel einigermassen durch die Wiederholung jedes der gefundenen Argumente:

x	$17^6 - x^3$			
			0	−1
		0		−1
0	24137569		−200	
		−40000		−1
200	16137569		−400	
		−120000		−1
200			−680	
		−174400		−1
280	2185569		−760	
		−235200		−1
280			−849	
		−242841		
289	0			

Auch um eine Wurzel einer numerischen Gleichung in gewöhnlichen Kettenbruch zu entwickeln, ist die Schemaform der dividirten Differenzen anwendbar unter einer eigentümlichen Zigzagbewegung zwischen zwei Reihen von Argumenten, einer rechts und einer andern links von dem Schema. Lesern, die mit der Theorie der Kettenbrüche vertraut sind, wird ein Beispiel genügen; eine ausführlichere Entwickelung würde ausser den Grenzen der Interpolationsrechnung fallen.

B e i s p i e l. Grösste Wurzel von $x^3 - 15x^2 + 45x - 15 = 0$ wird in Kettenbruch entwickelt

				1	
			−15		
		45		1	
0	−15		−4		
		1		1	
11	−4		7		
		78		1	
	−4		18		
		2		1	0
	−4		56		
		−74		1065	19
	−4		−1350		
		−150		1065	
0	−4		−285		
		−435		1065	
1	−439		780		
		345		1065	
	−439		1845		
		−533		1065	0
	−439		779		
		−1411		2623	2
	−439		−2043		
		−2289		2623	
0	−439		580		
		−1709		2623	
1	−2148		3203		
		1494		2623	
	−2148		5826		
		−2802		2623	0
	−2148		222		
		−7098		3067	2
	−2148		−13974		
		−11394		3067	
0	−2148		1361		
		−4589		3067	
5	−25093		16696		
		78891		3067	
			32031		
				3067	

Es ist folglich

$$x = 11 + \frac{1}{19}/+ \frac{1}{1}/+ \frac{1}{2}/+ \frac{1}{1}/+ \frac{1}{2}/+ \frac{1}{5}/+ \;=\; \frac{12863}{1164}.$$

Für die anderen Wurzeln findet man

$$x = 3 + \frac{1}{1}/+ \frac{1}{1}/+ \frac{1}{3}/+ \frac{1}{8}/+ \frac{1}{14}/+ \frac{1}{1}/+ \;=\; \frac{3130}{877}$$

und

$$x = \frac{1}{2}/+ \frac{1}{1}/+ \frac{1}{1}/+ \frac{1}{1}/+ \frac{1}{2}/+ \frac{1}{3}/+ \frac{1}{4}/+ \;=\; \frac{116}{305}.$$

§ 10.

Während, wie wir in den vorhergehenden §§ gesehen haben, die dividirten Differenzen und Newton's allgemeine Interpolationsformel für die grosse Klasse von dazu geeigneten Funktionen die Interpolationsaufgabe, die numerische Differentiation und die Entwickelung in Taylorsche Reihen in einer Weise lösen, die wenig zu wünschen übrig lässt, wendet man sie nicht ohne Schwierigkeit für numerische Integration an; diese Aufgabe ist aber auch mit Bezug auf Tafeln mit willkürlichen Argumenten an sich recht schwierig oder wenigstens mühsam.

Freilich genügt es für jede Integration, die zu integrirende Funktion in eine Taylorsche Potenzreihe zu entwickeln. Und dieses kann, wenn sich keine einfacheren Auswege bieten (siehe §§ 12 und 13), jedenfalls nach § 8 erreicht werden. In der Regel wird man also auch mittelst der dividirten Differenzen der gegebenen Tafel zu wiederholten Malen für ein Argument a — oder für mehrere — interpoliren, und wenn die Funktion X in der Reihe

$$X = A + (x-a)\,\delta(a,a) + (x-a)^2\,\delta(a,a,a) + (x-a)^3\,\delta(a,a,a,a) + \ldots.$$

gefunden ist, dann können die Integrale nach

$$\int X dx = K_1 + (x-a)A + \frac{1}{2}(x-a)^2\delta(a,a) + \frac{1}{3}(x-a)^3\delta(a,a,a) + \frac{1}{4}(x-a)^4\delta(a,a,a,a) + \ldots$$

$$\iint X dx^2 = K_2 + (x-a)K_1 + \frac{1}{2}(x-a)^2 A + \frac{1}{2.3}(x-a)^3\,\delta(a,a) + \frac{1}{3.4}(x-a)^4\,\delta(a,a,a) + \ldots$$

für beliebige Argumente ohne Kunstgriffe berechnet werden.

Die Integrationskonstanten $K_1, K_2, \ldots$ müssen aber dabei nach den Umständen der Aufgabe berechnet werden; überhaupt ist hierzu viel Rechnen nötig, und diese Metode muss als ein Umweg betrachtet werden. Für geschulte Rechner, die umfassende Integrationsarbeiten auszuführen haben, giebt es jedoch einen praktisch bequemeren Ausweg.

Anfangs müssen wir uns das Problem gelöst denken, so dass man die Werte, sowohl von der integrirten Funktion A, B, C, D als von der zu integrirenden

A', B', C', D', beziehungsweise den Argumenten a, b, c, d entsprechend, kennt; wir bilden Tafeln mit dividirten Differenzen für beide Funktionen, so dass jedes Argument zweimal in die Tafel der ersteren, aber nur einmal in die der letzteren eingeht. Die beiden werden nebeneinander in dasselbe Schema eingeführt, aber in der Tafel A', B', C', D' schreiben wir das Differenzenzeichen als θ zum Unterschied von δ in der Tafel des Integrals:

$$
\begin{array}{cc|c|cc|ccc|cc}
a & A & & & & & & & & \\
 & & \delta(a,a)=A' & & & & & & & \\
a & A & & \delta(a,a,b) & & & & & & \\
 & & \delta(a,b) & & \theta(a,b) & \delta(a,a,b,b) & & & & \\
b & B & & \delta(a,b,b) & & & & & \delta(a,a,b,b,c) & \\
 & & \delta(b,b)=B' & & & \delta(a,b,b,c) & \theta(a,b,c) & & & \\
b & B & & \delta(b,b,c) & & & & & \delta(a,b,b,c,c) & \\
 & & \delta(b,c) & & \theta(b,c) & \delta(b,b,c,c) & & & & \theta(a,b,c,d) \\
c & C & & \delta(b,c,c) & & & & & \delta(b,b,c,c,d) & \\
 & & \delta(c,c)=C' & & & \theta(b,c,c,d) & \theta(b,c,d) & & & \\
c & C & & \delta(c,c,d) & & & & & \delta(b,c,c,d,d) & \\
 & & \delta(c,d) & & \theta(c,d) & \delta(c,c,d,d) & & & & \\
d & D & & \delta(c,d,d) & & & & & & \\
 & & \delta(d,d)=D' & & & & & & & \\
d & D & & & & & & & & \\
\end{array}
$$

Es gilt nun brauchbare Relationen zwischen den bekannten θ-Differenzen und den doppelt so zahlreichen unbekannten δ-Differenzen zu finden. Und die Bedingung für die Ausführbarkeit hiervon ist, dass wir eine so hohe Ordnung erreichen können, dass die θ-Differenzen derselben $= 0$ sind, und dass in Folge davon auch die δ-Differenzen von entsprechenden und höheren Ordnungen alle $= 0$ sind. Dann kann man daraus, wenn nur einzelne δ-Differenzen jeder Ordnung durch θ-Differenzen bestimmt werden können, das Schema mit δ-Differenzen niedrigerer und niedrigerer Ordnungen ausfüllen und zuletzt $\delta(a,b)$, $\delta(b,c)$, $\delta(c,d)$ das Verhältnis der bestimmten Integrale zu ihren Intervallen finden.

Die Grundlage, aus der die hiezu nötigen Relationen zwischen den δ und den θ abgeleitet werden müssen, sind die Gleichungen $A' = \delta(a,a)$, $B' = \delta(b,b) \ldots X' = \delta(x,x)$. Durch den Ausdruck der θ (4) mittelst der θ von nächst niedrigerer Ordnung findet man allmählich

$$
\left.
\begin{aligned}
&\theta(a,b) = \delta(a,a,b); \quad \theta(a,b,c) = \delta(a,a,b,c); \quad \theta(a,b,c,d) = \delta(a,a,b,c,d); \\
&\qquad + \delta(a,b,b) \qquad\qquad\quad + \delta(a,b,b,c) \qquad\qquad\qquad + \delta(a,b,b,c,d) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; + \delta(a,b,c,c) \qquad\qquad\qquad + \delta(a,b,c,c,d) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \delta(a,b,c,d,d) \\[1em]
&\qquad\qquad\qquad \theta(a,b,c,d,e) = \delta(a,a,b,c,d,e) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \delta(a,b,b,c,d,e) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \delta(a,b,c,c,d,e) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \delta(a,b,c,d,d,e) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \delta(a,b,c,d,e,e)
\end{aligned}
\right\} \quad (12)
$$

Das Gesetz für diese Relationen ist offenbar und leicht zu beweisen. Hiermit haben wir aber unser Ziel nicht erreicht, denn die hier vorkommenden δ sind nur zum geringen Teil dieselben, welche ins Schema eingeführt werden sollen. Nur wenn wir Differenzen von so hoher Ordnung erreichen, dass sie sich konstant zeigen, wird dies gleichgültig. Unter dieser Bedingung sind

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\theta(a,b) &= \delta(a,a,b) = \delta(a,b,b)\\
\tfrac{1}{3}\theta(a,b,c) &= \delta(a,b,b,c)\\
\tfrac{1}{4}\theta(a,b,c,d) &= \delta(a,b,b,c,c) = \delta(b,b,c,c,d)
\end{aligned}$$

und im Allgemeinen ist $\frac{1}{r}$ des θ von $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $=$ die δ der entsprechenden r^{ten} Ordnung, so dass die Werte der konstanten δ unmittelbar ins Schema eingeführt werden können.

Weiter oder sogar über das ganze Schema durchgeführt, würde dies nur zu einer rohen Annäherung führen, die doch in günstigen Fällen, besonders bei kleinen und ungefähr gleich grossen Intervallen nicht ohne Wert ist.

Vermittelst der Gleichung (6) kann man aber die Interpolationen ausführen, welche erforderlich sind, um die in (12) eingehenden δ, die nicht in unser Schema eingehen, durch solche zu ersetzen, die demselben angehören. Dadurch erreicht man Gleichungen zwischen den θ jeder Ordnung und den unbekannten δ derselben oder höherer Ordnungen, welche in Verbindung mit Gleichungen zwischen diesen unter sich, besonders

$$\begin{aligned}
\delta(a,a,b) - \delta(a,b,b) &= (a-b)\,\delta(a,a,b,b)\\
\delta(a,b,b,c,c) - \delta(b,b,c,c,d) &= (a-d)\,\delta(a,b,b,c,c,d)
\end{aligned}$$

und analogen Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten genügen.

Die wichtigsten von diesen Gleichungen sind

$$\left.\begin{aligned}
\theta(a,b) &= \delta(a,a,b) + \delta(a,b,b)\\
\theta(a,b,c) &= 3\delta(a,b,b,c) + (a-b)\,\delta(a,a,b,b,c) + (c-b)\,\delta(a,b,b,c,c)\\
\theta(a,b,c,d) &= 2\big(\delta(a,b,b,c,c) + \delta(b,b,c,c,d)\big) + 3(a-b-c+d)\,\delta(a,b,b,c,c,d) +\\
&\quad + (a-b)(a-c)\,\delta(a,a,b,b,c,c,d) + (d-b)(d-c)\,\delta(a,b,b,c,c,d,d)\\
\theta(a,b,c,d,e) &= 5\delta(b,b,c,c,d,d) + 2(3a-b-c-d)\,\delta(a,b,b,c,c,d,d) +\\
&\quad + 2(3e-b-c-d)\,\delta(b,b,c,c,d,d,e) +\\
&\quad + \big((a-e)^2 + 3(a-b)(e-d) + 3(a-d)(e-c) + 3(a-c)(e-b)\big)\,\delta(a,b,b,c,c,d,d,e) +\\
&\quad + (a-b)(a-c)(a-d)\,\delta(a,a,b,b,c,c,d,d,e) + (e-b)(e-c)(e-d)\,\delta(a,b,b,c,c,d,d,e,e).
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Es ist kaum möglich, die allgemeinen Formeln für diese Relationen zu finden und noch weniger, explizite Ausdrücke für jedes δ durch θ derselben und höherer Ordnungen zu geben. Für alle Praxis aber, die selten mit Differenzen von höherer

als der 5ten bis 6ten Ordnung arbeitet, genügen diese Formeln. Infolge einer successiven Korrektionsmetode, die wir im Folgenden oft anwenden müssen, arbeitet man eben so leicht mit dem System der impliziten Gleichungen als mit den expliziten, wenn, wie hier, alle Unbekannten berechnet werden sollen, und die Elimination wird überflüssig, weil die Unbekannten durch die schon gefundenen eine nach der andern bestimmt werden können. Die Voraussetzung dieser Metode ist nur, dass man, ehe man zur Berechnung des δ einer r^{ten} Ordnung schreitet, die von $(r+1)^{\text{ter}}$ und von höheren Ordnungen berechnet hat, insofern es nicht im Voraus gegeben ist, dass sie verschwinden. Stufenweise wird man auf diese Weise in den Stand gesetzt das Schema betreffs der niedrigeren und niedrigsten Ordnungen auszufüllen. Das Verfahren erläutert man durch ein numerisches Beispiel. Die Funktion $X' = 6x^5 - 185x^4 + 2144x^3 - 11364x^2 + 26016x - 17280$, welcher $X = x(x-4)(x-6)(x-8)(x-9)(x-10)$ entsprechen soll.

x	X	$\delta^{(1)}$ & X	$\delta^{(2)}$	$\theta^{(1)}$	$\delta^{(3)}$	$\theta^{(2)}$	$\delta^{(4)}$	$\theta^{(3)}$	$\delta^{(5)}$	$\theta^{(4)}$	$\delta^{(6)}$	$\theta^{(5)}$
0	0	**—17280**										
			9720									
		— 7560	8308·5	16617	—2823							
			6897				399					
1	—7560	**— 663**			—2025	— 6137			—31			
			2847				337				1	
		2184	2171·5	4343	—1351			1184	—28			
			1496				253				1	
2	—5376	**3680**			—845	—2585			—25	—119		
			—194				203				1	
		3486	—413·5	— 827	—439		161	589	—21			6
			—633				119				1	
3	—1890	**2853**			— 82	—229			—17	—77		
			—879				68				1	
		1095	—757	—1514	122		38	127	—12			6
			—635				8				1	
5	300	**— 175**			154	406			— 7	—17		
			— 19				—20				1	
		— 213	55	110	74		—16	—26	1			6
			129				—12				1	
7	— 126	**45**			2	198			9	31		
			141				42				1	
		609	649	1298	254			191	14			
			1157				112				1	
11	2310	**5237**			590	1153			19			
			2927				169					
		2310	2378·5	4757	1097							
			1830									
10	0	**480**										

Die drei konstanten $\theta = 6$ der 5^{ten} Ordnung geben durch Division mit 6 das für die ganze Tafel konstante $\delta = 1$ der 6^{ten} Ordnung. Für die 5^{te} Ordnung bestimmt man $\delta(2,2,3,3,5,5) = -17$ und $\delta(3,3,5,5,7,7) = -7$ durch $-77 = 5\delta(2,2,3,3,5,5) + (3\cdot 8 - 2\cdot 10)(1+1)$ und $-17 = 5\delta(3,3,5,5,7,7) + (3\cdot 13 - 2\cdot 15)(1+1)$.

Die Mittelzahls δ-Differenz der 4^{ten} Ordnung $\frac{1}{2}\big(\delta(2,3,3,5,5) + \delta(3,3,5,5,7)\big) = 38 = x$ bestimmt man durch die Gleichung $127 = 4x + 3\cdot(9-8)(-12) + (1\cdot 3)\cdot 1 + (2\cdot 4)\cdot 1$, die dividirte Differenz der 3^{ten} Ordnung $\delta(2,3,3,5) = -82$ bestimmt man durch $-229 = 3\delta(2,3,3,5) + (-1)\cdot 119 + 2\cdot 68$.

Die Mittelzahls-Differenzen der 2^{ten} Ordnung sind hier geradezu gegeben als die Hälfte der θ-Differenzen, und die Differenzen der 1^{sten} Ordnung haben ihre Stützpunkte unmittelbar in den gegebenen Funktionswerten, aus denen man die dividirten bestimmten Integrale durch diejenige Interpolation erhält, die hier wie bei den höheren Ordnungen das Schema ausfüllt, was sich durch doppelte Berechnung, von oben und von unten, kontrolliren lässt.

§ 11.

Man ist nicht auf einzelne Integration beschränkt, sondern kann gleichzeitig doppelte (oder mehrdoppelte) Integration für willkürliche Argumente mittelst dividirter Differenzen ausführen. Man muss dann jedes Argument einmal für jede Integration wiederholen. Bei doppelter Integration geht man von der Hälfte der gegebenen zweiten Differentialquotienten $(\frac{1}{2}A'')$, $(\frac{1}{2}B'')$, ... als Funktion der Argumente $a, b, \ldots$ mit dem daraus folgenden System dividirter Differenzen (durch θ bezeichnet) aus, und erreicht durch Interpolation sowohl das erste Integral A', B', ... als das zweite Integral A, B, C, das heisst die gesuchte Funktion. Dies wird durch folgendes Bruchstück des Doppelschemas erläutert.

$$
\begin{array}{l|r|r|r|r|r}
A) & & & & & \\
 & & & & & \\
B & & \delta(a,b,b) & & \delta(a,a,b,b,b) & \\
 & B' = \delta(b,b) & & \delta(a,b,b,b) & & \delta(a,a,b,b,b,c) \\
B & & \tfrac{1}{2}B'' = \delta(b,b,b) & & \theta(a,b,c)\;\delta(a,b,b,b,c) & \\
 & B' = \delta(b,b) & & \delta(b,b,b,c) & & \delta(a,b,b,b,c,c) \\
B & & \delta(b,b,c) & & \delta(b,b,b,c,c) & \\
 & \delta(b,c) & & \theta(b,c)\;\delta(b,b,c,c) & & \theta(a,b,c,d)\;\delta(b,b,b,c,c,c) \\
C & & \delta(b,c,c) & & \delta(b,b,c,c,c) & \\
 & C' = \delta(c,c) & & \delta(b,c,c,c) & & \delta(b,b,c,c,c,d) \\
C & & \tfrac{1}{2}C'' = \delta(c,c,c) & & \theta(b,c,d)\;\delta(b,c,c,c,d) & \\
 & C' = \delta(c,c) & & \delta(c,c,c,d) & & \delta(b,c,c,c,d,d) \\
C & & \delta(c,c,d) & & \delta(c,c,c,d,d) & \\
D) & & & & &
\end{array}
$$

Die Relationen zwischen den δ- und θ-Differenzen der einfachsten und gewiss einzig übersehbaren Form, in der die δ doch in der Regel nicht im Schema selbst vorkommen, sind

$$
\left.\begin{aligned}
\theta(a,b) &= \delta(a,a,a,b)+\delta(a,a,b,b)\\
&\quad+\delta(a,b,b,b)\\
\theta(a,b,c) &= \delta(a,a,a,b,c)+\delta(a,a,b,b,c)+\delta(a,a,b,c,c)\\
&\quad+\delta(a,b,b,b,c)+\delta(a,b,b,c,c)\\
&\quad+\delta(a,b,c,c,c)\\
\theta(a,b,c,d) &= \delta(a,a,a,b,c,d)+\delta(a,a,b,b,c,d)+\delta(a,a,b,c,c,d)+\delta(a,a,b,c,d,d)\\
&\quad+\delta(a,b,b,b,c,d)+\delta(a,b,b,c,c,d)+\delta(a,b,b,c,d,d)\\
&\quad+\delta(a,b,c,c,c,d)+\delta(a,b,c,c,d,d)\\
&\quad+\delta(a,b,c,d,d,d)\\
\theta(a,b,c,d,e) &= \delta(a,a,a,b,c,d,e)+\delta(a,a,b,b,c,d,e)+\delta(a,a,b,c,c,d,e)+\delta(a,a,b,c,d,d,e)+\delta(a,a,b,c,d,e,e)\\
&\quad+\delta(a,b,b,b,c,d,e)+\delta(a,b,b,c,c,d,e)+\delta(a,b,b,c,d,d,e)+\delta(a,b,b,c,d,e,e)\\
&\quad+\delta(a,b,c,c,c,d,e)+\delta(a,b,c,c,d,d,e)+\delta(a,b,c,c,d,e,e)\\
&\quad+\delta(a,b,c,d,d,d,e)+\delta(a,b,c,d,d,e,e)\\
&\quad+\delta(a,b,c,d,e,e,e)
\end{aligned}\right\}\quad(14)
$$

Durch Interpolation infolge (6) reduciren wir diese δ-Differenzen zu solchen, die im Schema selbst vorkommen, und finden:

$$
\left.\begin{aligned}
\theta(a,b) &= 3\delta(a,a,b,b)+0+(a-b)^2\,\delta(a,a,a,b,b,b)\\
\theta(a,b,c) &= 6\delta(a,b,b,b,c)+2(a-2b+c)\begin{Bmatrix}\delta(a,a,b,b,b,c)\\+\delta(a,b,b,b,c,c)\end{Bmatrix}+\tfrac{3}{2}\begin{Bmatrix}(a-b)^2+\\+(c-a)^2+\\+(b-c)^2\end{Bmatrix}\delta(a,a,b,b,b,c,c)\\
&\quad+(a-b)^2(a-c)\,\delta(a,a,a,b,b,b,c,c)+\\
&\quad+(c-b)^2(c-a)\,\delta(a,a,b,b,b,c,c,c)\\
\theta(a,b,c,d) &= 10\delta(b,b,b,c,c,c)+\tfrac{15}{2}(a-b-c+d)\{\delta(a,b,b,b,c,c,c)+\delta(b,b,b,c,c,c,d)\}+\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(15)
$$

Und zuletzt $\theta^{(n)}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\,\delta^{(n+2)}+\ldots$

Ein Rechenbeispiel, aus derselben Funktion $X=(x-4)(x-6)(x-8)(x-9)(x-10)$ wie das vorige Beispiel genommen, ist unten behandelt. Hier ist θ der 4^ten^ Ordnung konstant $=15$ und giebt δ der 6^ten^ Ordnung konstant $=1$. Aus den θ der 3^ten^ Ordnung berechnet man die δ der 5^ten^ Ordnung, z. B. $\delta(2,2,2,3,3,3)=-22$ und $\delta(5,5,5,7,7,7)=-1$ aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
-205 &= 10\delta(2,2,2,3,3,3)+\tfrac{15}{2}(1-2-3+5)(1+1)\\
-20 &= 10\delta(5,5,5,7,7,7)+\tfrac{15}{2}(3-5-7+11)(1+1).
\end{aligned}
$$

Aus den θ der 2^ten^ Ordnung berechnet man die δ der 4^ten^ Ordnung, z. B. $\delta(2,3,3,3,5)=100$ und $\delta(3,5,5,5,7)=-10$ aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
551 &= 6\delta(2,3,3,3,5)+2(2-2\cdot3+5)(-19-16)+\tfrac{3}{2}(1+9+4)\cdot1\\
-24 &= 6\delta(3,5,5,5,7)+2(3-2\cdot5+7)(-9-5)+\tfrac{3}{2}(4+16+4)\cdot1.
\end{aligned}
$$

Aus den θ der 1[sten] Ordnung berechnet man die δ der 3[ten] Ordnung, z. B. $\delta(3,3,5,5) = 122$ aus der Gleichung

$$314 = 3\delta(3,3,5,5) + (3-5)^2(-13),$$

Alles indem man das Schema durch Interpolation von rechts nach links ausfüllt und daraus die Korrektionsfaktoren nimmt. Von den δ der 2[ten] Ordnung ist jedes dritte als die Hälfte eines gegebenen Funktionswertes unmittelbar gegeben, und die anderen füllt man durch Interpolation aus. Von einer arbiträren Integrationskonstante ausgehend, kann man dann die δ der 1[sten] Ordnung interpoliren, und diese sind dann dividirte bestimmte Integrale der 2[ten] Ordnung.

x	X	$\delta^{(1)}$	$\delta^{(2)}$ & $\frac{1}{2}X''$	$\delta^{(3)}$	$\theta^{(1)}$	$\delta^{(4)}$	$\theta^{(2)}$	$\delta^{(5)}$	$\theta^{(3)}$	$\delta^{(6)}$	$\theta^{(4)}$
0	0		**13008**								
		—17280		—3288							
			9720			465					
		— 7560		—2823	—8503			—34			
			6897			431				1	
		— 663		—2392				—32			
1	—7560		**4505**			367	2211			1	
		— 663		—1658				—30			
			2847			307				1	
		2184		—1351	—4081			—28	—280		
			1496			279				1	
		3680		—1072				—26			
2	—5376		**424**			227	1371			1	15
		3680		— 618				—24			
			—194			179				1	
		3486		— 439	—1339			—22	—205		
			—633			157				1	
		2853		— 282				—19			
3	—1890		**—915**			100	551			1	15
		2853		18				—16			
			—879			52				1	
		1095		122	314			—13	—115		
			—635			26				1	
		— 175		174				— 9			
5	300		**—287**			—10	—24			1	15
		— 175		134				— 5			
			— 19			—30				1	
		— 213		74	218			— 1	20		
			129			—32				1	
		45		10				5			
7	— 126		**149**			— 2	136			1	15
		45		— 2				11			
			141			64				1	
		609		254	1034			17	125		
			1157			132				1	
		5237		782				20			
11	2310		**4285**			192	761			1	
		5237		1358				23			
			2927			261				1	
		2310		1097	3317			26			
			1830			235					
		480		862							
10	0		**968**								

Diese Integrationsmetode hat eine sehr ausgedehnte Anwendbarkeit. Bei Rechnungen auf theoretischer Grundlage, z. B. Störungsrechnungen, gestattet sie, dass man je nach der wechselnden Schwierigkeit der Integration, die sich in den dividirten Differenzen kund tut, die Intervalle beliebig grösser oder kleiner wählt. Bei Rechnungen mit beobachteten Funktionswerten, wozu man überhaupt Newtons allgemeine Interpolation durch dividirte Differenzen weit häufiger als bisher anwenden sollte, erlaubt unsere Integrationsmetode eine direkte Berechnung der Integralen dieser Funktionen und giebt dieselben in einer solchen Form, dass sie die Wahl der Grenzen der Integrale so frei wie möglich legt, indem das Resultat der Metode Tafeln sind, welche für Interpolation zum willkürlichen Argument innerhalb des beobachteten Gebietes bequem geordnet sind. Wie jede numerische Integration führt auch diese Metode eine gewisse schwache Ausgleichung beobachteter oder annähernd berechneter Funktionswerte mit sich. Ihre Begrenzung liegt darin, dass man Differenzen von sehr hoher Ordnung nicht anwenden kann. Bei beobachteten Funktionen wird man oft durch Teilung der Intervalle dieser Begrenzung abhelfen können, besonders wenn die Beobachtungen zahlreich sind und eine Wahl gestatten. Allzu weit in der Anwendung dieses Mittels zu gehen, ist jedoch nicht zu empfehlen. Werden die Intervalle im Verhältnis zu den Fehlern der Beobachtungen klein, werden diese zu grossen Einfluss auf die dividirten Differenzen ausüben und sie so unregelmässig schwingen lassen, dass man nicht beurteilen kann, mit welcher Ordnung man sie für konstant oder verschwindend ansehen kann.

Die Integrationen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung können mit Vorteil nach demselben Schema ausgeführt werden wie die oben besprochenen zweifachen Quadraturen. Der Unterschied ist nur, dass die Rechnung durch Versuche geführt werden muss, wenn eine Differentialgleichung numerisch integrirt werden soll.

Wenn die beiden Integrationskonstanten in solcher Weise gegeben sind, dass man sogleich für irgend ein Argument die Werte der Funktion und ihres ersten Differentialquotienten kennt, und infolgedessen wenigstens auch den Wert des zweiten Differentialquotienten aus der Gleichung berechnen kann, wird in allgemeinen Fällen die Interpolation nach Taylors Reihe für andere Argumente mit hinreichender Genauigkeit gelingen, vorausgesetzt dass man die Intervalle klein genug genommen hat. Mit dieser Erweiterung füllt man das obige Schema aus und berechnet zuerst die dividirten θ-Differenzen des halben zweiten Differentialquotienten.

Jetzt müssen die Versuche anfangen; und es empfiehlt sich für diese, anzunehmen, dass die θ-Differenz der höchsten zu verbürgenden Ordnung konstant ist. Damit extrapolirt man für einige fernere Argumente im θ-Schema. Nach den

obigen Formeln (15) werden die δ-Differenzen vollständig berechnet und damit Werte für die Funktion und für den ersten Differentialquotienten. Mit diesen prüft man mittelst der Differential-Gleichung die extrapolirten Werte des zweiten Differentialquotienten und des ganzen θ-Schemas. Mit den verbesserten Werten der $\theta^{(n)}$ kann gleichzeitig weiter extrapolirt werden und feinere Verbesserungen können durch die δ-Differenzen ausgeführt werden.

Die Konvergenz dieses Verfahrens hängt von einer geschickten Wahl der Intervalle ab, und in dieser Wahl besteht überhaupt die Kunst des Rechners, die für solche Arbeiten nicht durch allgemeine Vorschriften ersetzt werden kann.

§ 12.

Es ist, wie wir es gesehen haben, weder für Interpolation, Differentiation noch Integration notwendig, dass die Argumente der Tafel in einer bestimmten Weise ausgewählt oder geordnet sind. Durch die Voraussetzung völliger Willkür erreicht man sogar sehr bedeutende Vorteile sowohl — einerseits, weil man unabweisbaren Forderungen entgegenkommen kann, welche besonders Tafeln der Beobachtungen stellen können, als auch — andererseits besonders, weil es die Beweise erleichtert und Rücksichtnahme auf das Restglied ermöglicht, dass das unbekannte Argument sich nicht durch seine notwendige Willkür von den Argumenten der Tafel unterscheidet. Indess schon mit Rücksicht auf das Aussere und das Aestetische wird man sich stets bestreben, seine Tafeln in einer gleichmässig fortschreitenden (äquidistanten) Form mitzuteilen, wo die Argumente in der natürlichsten Weise mit gleich grossen Intervallen geordnet sind.

Man erzielt hierdurch einige recht wesentliche Vorteile. Wenn die Intervalle der Tafel gleich gross $= a$ sind, werden die Divisoren für die dividirten Differenzen konstant, der 1sten, der 2ten u. s. w. Ordnung beziehungsweise $a, 2a, \ldots$. Man kann deshalb diese Divisionen sparen und sich damit begnügen, einfache Differenzen und Differenzen der Differenzen von den verschiedenen Ordnungen zu bilden. Die Differenzen der n^{ten} Ordnung braucht man nun auch nicht als Funktionen von $n+1$ Argumenten zu betrachten; zu ihrer völligen Bezeichnung genügt es, nebst der Ordnung, das Intervall a zu nennen und als variables Argument entweder ein bestimmtes der Argumente oder am besten die Mittelzahl der sämtlichen Argumente. Für die $\delta(p, p+a, \ldots p+na)$ entsprechende einfache Differenz schreiben wir dann

$$\Delta_a^n\left(p+\frac{n}{2}a\right) = n!\,a^n\delta(p, p+a, \ldots p+na). \tag{16}$$

Man kann zu den einfachen Differenzen Schemata derselben Form wie in § 6 benutzen und $\Delta_a^n\left(p+\frac{na}{2}\right)$ den Platz des $\delta(p, p+a, \ldots, p+na)$ darin einnehmen lassen.

In der Interpolationsformel Newtons können wir, wenn sie zu einfachen Differenzen umgebildet wird, nicht das Restglied in exakter Form geben, aber sonst wird sie mit Differenzen auf abwärts gehender schräger Linie:

$$f(x)=f(p)+\frac{x-p}{a}\left\{\Delta_a'\left(p+\frac{a}{2}\right)+\frac{x-p-a}{2a}\left[\Delta_a^2(p+a)+\frac{x-p-2a}{3a}\left(\Delta_a^3\left(p+\frac{3a}{2}\right)+\ldots\right)\right]\right\}, \quad (17)$$

oder mit Differenzen auf aufwärts gehender schräger Linie:

$$f(x)=f(p)+\frac{x-p}{a}\left\{\Delta_a'\left(p-\frac{a}{2}\right)+\frac{x-p+a}{2a}\left[\Delta_a^2(p-a)+\frac{x-p+2a}{3a}\left(\Delta_a^3\left(p-\frac{3a}{2}\right)+\ldots\right)\right]\right\}. \quad (18)$$

Diese Gleichungen und die gleichmässig fortschreitenden Argumente überhaupt laden ferner zur Transformirung der Argumente in der Weise ein, dass man das Intervall zur Einheit und das prinzipale Argument zum Nullwert nimmt; $p=0$ und $a=1$ geben, indem $x=p+ay$:

$$F(y)=F(0)+y\left\{\Delta'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{y-1}{2}\left(\Delta^2(1)+\frac{y-2}{3}\left[\Delta^3\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{y-3}{4}\left(\Delta^4(2)+\frac{y-4}{5}\left(\Delta^5\left(\frac{5}{2}\right)+\ldots\right)\right)\right]\right)\right\} \quad (19)$$

und

$$F(y)=F(0)+y\left\{\Delta'\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{y+1}{2}\left(\Delta^2(-1)+\frac{y+2}{3}\left[\Delta^3\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{y+3}{4}\left(\Delta^4(-2)+\frac{y+4}{5}\left(\Delta^5\left(-\frac{5}{2}\right)+\ldots\right)\right)\right]\right)\right\} \quad (20)$$

für Interpolation bei abwärts (19) oder aufwärts (20) gehender schräger Linie.

Die Rechnung wird auch hier, wie nach der allgemeinen Formel Newtons (5), am leichtesten von rechts nach links ausgeführt. In älteren Logarithmentafeln findet man Hilfstafeln über die Logarithmen der von y abhängigen Koeffizienten zum Gebrauch für Interpolation mittelst Logarithmen; aber selten wird man Vorteil aus der Anwendung derselben ziehen. Häufiger bedarf man der Tafeln Stirlings, um (19) und (20) in die Form von Potenzreihen zu bringen, oder um Potenzreihen in die Form dieser Interpolationsreihen zu überführen. Dies kann und zwar oft mit Vorteil in der Weise gemacht werden, dass man mittelst Division der Differenzen durch 1, 2, 6, 24, 120, ... zu dividirten Differenzen zurückgeht und mit diesen zu wiederholtem Argument interpolirt oder umgekehrt. Es ist jedenfalls gut, diese wichtigen Operationen in mehreren Weisen ausführen zu können. Nur in der Form der Potenzreihe ist es leicht, sowohl die Funktion formell zu differentiiren oder integriren als auch das Argumentintervall zu variiren. Deshalb muss man Faktoriellen wie $y(y+1)(y+2)\ldots(y+n)$ zu Potenzreihen umbilden können, und eine Tafel der Zahlenkoeffizienten derselben bis zu hohen Graden ist unter anderem erforderlich, wenn man das Gesetz für eine Reihe durch exakte Zahlenberechnung der Koeffizienten der geordneten Potenzreihe suchen will.

Man hat für die Faktorielle des m^{ten} Grades

$$y(y+1)\ldots(y+m-1) = \Sigma \overset{m}{I}(p)\, y^p \qquad (p = 1, 2, \ldots m) \tag{21}$$

$\overset{m}{I}(p) =$

$m =$ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 $= m$	p
1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	39916800	1
	1	3	11	50	274	1764	13068	109584	1026576	10628640	120543840	2
		1	6	35	225	1624	13132	118124	1172700	12753576	150917976	3
			1	10	85	735	6769	67284	723680	8409500	105258076	4
				1	15	175	1960	22449	269325	3416930	45995730	5
					1	21	322	4536	63273	902055	13339535	6
						1	28	546	9450	157773	2637558	7
							1	36	870	18150	357423	8
								1	45	1320	32670	9
									1	55	1925	10
										1	66	11
											1	12

Fortsetzung.

$\overset{m}{I}(p) =$

p	$m = 13$	$m = 14$	$m = 15$	$m = 16$	p
1	479001600	6227020800	87178291200	1307674368000	1
2	1486442880	19802759040	283465647360	4339163001600	2
3	1931559552	26596717056	392156797824	6165817614720	3
4	1414014888	20313753096	310989260400	5056995703824	4
5	657206836	9957703756	159721605680	2706813345600	5
6	206070150	3336118786	56663366760	1009672107080	6
7	44990231	790943153	14409322928	272803210680	7
8	6926634	135036473	2681453775	54631129553	8
9	749463	16669653	368411615	8207628000	9
10	55770	1474473	37312275	928095740	10
11	2717	91091	2749747	78558480	11
12	78	3731	143325	4899622	12
13	1	91	5005	218400	13
		1	105	6580	14
			1	120	15
				1	16
					p

Für $m = 5$ zeigt die Tafel also beispielweise, dass

$$y(y \pm 1)(y \pm 2)(y \pm 3)(y \pm 4) = 24y \pm 50y^2 + 35y^3 \pm 10y^4 + y^5.$$

Die entgegengesetzte Aufgabe, eine Potenzreihe als eine Reihe von Faktoriellen zu entwickeln, hat insbesondere Bedeutung, weil die leichteste Weise, eine Tafel zu berechnen, die rein additive sein dürfte, welche eine völlige Reihe von einfachen Differenzen auf einer schrägen Linie voraussetzt. Aus der konstanten Differenz der höchsten Ordnung lassen sich dann die Differenzen der niedrigeren Ordnung und schliesslich die Funktionswerte durch lauter Additionen berechnen.

Hierzu dient eine andere Stirlingsche Tafel, über die Zahlen $\overset{m}{\Pi}(p)$, welche Koeffizienten in der Gleichung

$$y^m = \Sigma \overset{m}{\Pi}(p)\, y(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1), \qquad (p = 1, 2 \ldots m) \tag{22}$$

sind.

Diese Tafel ist;

$m =$ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 $= m$	p
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	2
		1	6	25	90	301	966	3025	9330	28501	86526	3
			1	10	65	350	1701	7770	34105	145750	611501	4
				1	15	140	1050	6951	42525	246730	1379400	5
					1	21	266	2646	22827	179487	1323652	6
						1	28	462	5880	63987	627396	7
							1	36	750	11880	159027	8
								1	45	1155	22275	9
									1	55	1705	10
										1	66	11
	$\overset{m}{\Pi}(p)$										1	12
												p

p	$m = 13$	$m = 14$	p	$m = 15$	$m = 16$	p
1	1	1	1	1	1	1
2	4095	8191	2	16383	32767	2
3	261625	788970	3	2375101	7141686	3
4	2532530	10391745	4	42355950	171798901	4
5	7508501	40075035	5	210766920	1096190550	5
6	9321312	63436373	6	420693273	2734926558	6
7	5715424	49329280	7	408741333	3281882604	7
8	1899612	20912320	8	216627840	2141764053	8
9	359502	5135130	9	67128490	820784250	9
10	39325	752752	10	12662650	193754990	10
11	2431	66066	11	1479478	28936908	11
12	78	3367	12	106470	2757118	12
13	1	91	13	4550	165620	13
		1	14	105	6020	14
			15	1	120	15
$\overset{m}{\Pi}(p)$					1	16
			p			p

Die höheren Teile dieser Tafeln sind von N. P. Bertelsen berechnet worden und bis zu $m = 29$ oder $p = 29$ fortgesetzt. Eine Abschrift davon gehört der Bibliotek der Kopenhagener Sternwarte.

Beispiel. Eine durch Tafel definirte Funktion soll für jedes Zehntel des ursprünglichen Argumentes, zwischen 2·0 und 2·5 integrirt werden. Die Tafel sei

x	$4x^3$				
0	0		0		
		4		24	
1	4		24		
		28		24	
2	32		48		konstant.
		76		24	
3	108		72		
		148		24	
4	256		96		

Legt man dann die Null des Argumentes auf $x = 2$, und schreibt man $y = x - 2$, ist die Interpolationsformel nach aufwärts gehender schräger Linie

$$
\begin{aligned}
f(y) &= 32 + y\left(28 + \frac{y+1}{2}\left(24 + \frac{y+2}{3}\cdot 24\right)\right) = \\
&= 32 + 28y + 12(y^2 + y) + 4(y^3 + 3y^2 + 2y) = \\
&= 32 + 48y + 24y^2 + 4y^3.
\end{aligned}
$$

Das Integral hiervon kann sein

$$\int f(y)\,dy = 16 + 32y + 24y^2 + 8y^3 + y^4.$$

Nimmt man das Zehntel des Intervalls zur Einheit, indem $y = \frac{z}{10}$, ist

$$
\begin{aligned}
\int f(y)\,dy &= 16 + 3{\cdot}2z + {\cdot}24z^2 + {\cdot}008z^3 + {\cdot}0001z^4 \\
&= 16 + 3{\cdot}2z + {\cdot}24\big(z(z-1) + z\big) + {\cdot}008\big(z(z-1)(z-2) + 3z(z-1) + z\big) + \\
&\qquad + {\cdot}0001\big(z(z-1)(z-2)(z-3) + 6z(z-1)(z-2) + 7z(z-1) + z\big) \\
&= 16 + 3{\cdot}4481z + {\cdot}2647z(z-1) + {\cdot}0086z(z-1)(z-2) + {\cdot}0001z(z-1)(z-2)(z-3)
\end{aligned}
$$

und hiermit kann dann die Tafel über das verlangte Integral aus ihrer (obersten) abwärts gehenden schrägen Linie berechnet werden:

x	x^4				
2·0	16·0000				
		3·4481			
2·1	19·4481		·5294		
		3·9775		·0516	
2·2	23·4256		·5810		·0024
		4·5585		·0540	
2·3	27·9841		·6350		·0024
		5·1935		·0564	
2·4	33·1776		·6914		·0024
		5·8849		·0588	
2·5	39·0625		·7502		·0024

§ 13.

Wo die Begrenzung der Tafel nicht die Anwendung von Differenzen einer schrägen Linie erfordert, wird man es in der Regel vorziehen, die Interpolation vorzugsweise auf die Argumente zu bauen, die dem Interpolationsargument am nächsten liegen. Alle hierzu dienlichen Formeln können wie (17) und (18) aus der

allgemeinen Formel Newtons ausgeschrieben werden. Die wichtigsten sind die folgenden Formeln mit ununterbrochener Abwechselung von aufwärts- und abwärts gehender Schräglinie, wo die Mittelargumente der Differenzen konstant auf dem Intervall fallen können, in der x liegt:

$$f(x) = f(p) + \frac{x-p}{a}\left\{\Delta'_a\left(p+\frac{a}{2}\right) + \frac{x-p-a}{2a}\left[\Delta^2_a(p) + \frac{x-p+a}{3a}\left(\Delta^3_a\left(p+\frac{a}{2}\right)+\ldots\right)\right]\right\} \tag{23}$$

$$f(x) = f(p) + \frac{x-p}{a}\left\{\Delta'_a\left(p-\frac{a}{2}\right) + \frac{x-p+a}{2a}\left[\Delta^2_a(p) + \frac{x-p-a}{3a}\left(\Delta^3_a\left(p-\frac{a}{2}\right)+\ldots\right)\right]\right\} \tag{24}$$

$$f(x) = f(p-a) + \frac{x-p+a}{a}\left\{\Delta'_a\left(p-\frac{a}{2}\right) + \frac{x-p}{2a}\left[\Delta^2_a(p-a) + \frac{x-p+2a}{3a}\left(\Delta^3_a\left(p-\frac{a}{2}\right)+\ldots\right)\right]\right\} \tag{25}$$

Transformiren wir auch hier das Argument in der Weise, dass es in p Null ist und a zur Einheit hat, bekommen diese Gleichungen die klarere Gestalt mit $x = p + ya$

$$F(y) = F(0) + y\left\{\Delta'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{y-1}{2}\left[\Delta^2(0) + \frac{y+1}{3}\left(\Delta^3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{y-2}{4}\left\{\Delta^4(0) + \frac{y+2}{5}\left[\Delta^5\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots\right]\right\}\right)\right]\right\} \tag{23 a}$$

$$F(y) = F(0) + y\left\{\Delta'\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{y+1}{2}\left[\Delta^2(0) + \frac{y-1}{3}\left(\Delta^3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{y+2}{4}\left\{\Delta^4(0) + \frac{y-2}{5}\left[\Delta^5\left(-\frac{1}{2}\right)+\ldots\right]\right\}\right)\right]\right\} \tag{24 a}$$

$$F(y) = F(-1) + (y+1)\left\{\Delta'\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{y}{2}\left[\Delta^2(-1) + \frac{y+2}{3}\left(\Delta^3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{y-1}{4}\left\{\Delta^4(-1) + \frac{y+3}{5}\left[\Delta^5\left(-\frac{1}{2}\right)+\ldots\right]\right\}\right)\right]\right\}. \tag{25 a}$$

Hieraus erhält man elegantere und sowohl in theoretischer als in praktischer Beziehung wichtigere Formeln durch die Bildung von Mittelzahlen entweder von (23 a) und (24 a) oder von (24 a) und (25 a). Aus dem ersteren Paare nämlich:

$$\left.\begin{aligned} F(y) = {} & F(0) + \frac{y^2}{1\cdot 2}\left(\Delta^2(0) + \frac{y^2-1}{3\cdot 4}\left(\Delta^4(0) + \frac{y^2-4}{5\cdot 6}\left(\Delta^6(0) + \ldots + \frac{y^2-(n-1)^2}{(2n-1)2n}\left(\Delta^{2n}(0)+\ldots\right)\right)\right)\right) + \\ & + y\left\{\frac{\Delta'(-\frac{1}{2})+\Delta'(\frac{1}{2})}{2} + \frac{y^2-1}{2\cdot 3}\left(\frac{\Delta^3(-\frac{1}{2})+\Delta^3(\frac{1}{2})}{2} + \frac{y^2-4}{4\cdot 5}\left(\frac{\Delta^5(-\frac{1}{2})+\Delta^5(\frac{1}{2})}{2} + \ldots + \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. + \frac{y^2-n^2}{2n(2n+1)}\left(\frac{\Delta^{2n+1}(-\frac{1}{2})+\Delta^{2n+1}(\frac{1}{2})}{2}+\ldots\right)\right)\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

und aus dem letzteren:

$$\left.\begin{aligned} F(y) = {} & \frac{F(-1)+F(0)}{2} + \frac{y(y+1)}{1\cdot 2}\left\{\frac{\Delta^2(-1)+\Delta^2(0)}{2} + \ldots + \frac{(y-n+1)(y+n)}{(2n-1)2n}\left(\frac{\Delta^{2n}(-1)+\Delta^{2n}(0)}{2}+\ldots\right)\right\} + \\ & + \left(y+\tfrac{1}{2}\right)\left\{\Delta'(-\tfrac{1}{2}) + \frac{y(y+1)}{2\cdot 3}\left[\Delta^3(-\tfrac{1}{2}) + \ldots + \frac{(y-n+1)(y+n)}{2n(2n+1)}\left(\Delta^{2n+1}(-\tfrac{1}{2})+\ldots\right)\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Als Beispiel dieser letzten ist hervorzuheben, Interpolation in der Mitte des Intervalls, $y = -\frac{1}{2}$, zwischen den Argumenten -1 und 0.

Nach (27) ist

$$F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\begin{aligned} & F(-1) - \frac{1}{8}\left(\Delta^2(-1) - \frac{3}{16}\left(\Delta^4(-1) - \frac{5}{24}\left(\Delta^6(-1) - \ldots - \frac{2n-1}{8n}\left((\Delta^{2n}(-1) - \ldots\right)\right)\right)\right) \\ & + F(0) - \frac{1}{8}\left(\Delta^2(0) - \frac{3}{16}\left(\Delta^4(0) - \frac{5}{24}\left(\Delta^6(0) - \ldots - \frac{2n-1}{8n}\left(\Delta^{2n}(0) - \ldots\right)\right)\right)\right). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Zur Umbildung dieser Interpolationsformeln in Potenzreihen und umgekehrt dienen folgende Tafeln, die den Stirlingschen analog sind. Ich gebe sie nach einer Mitteilung von Oppermann wieder, und besonders für (26) hat man

$$y^2(y^2-1^2)\ldots\left(y^2-(m-1)^2\right) = \Sigma(-1)^{m+p}\overset{2m}{III}(2p)\cdot y^{2p}. \tag{29}$$

$2m =$ 2	4	6	8	10	12	14	16	$2p$
1	1	4	36	576	14400	518400	25401600	2
	1	5	49	820	21076	773136	38402064	4
		1	14	273	7645	296296	15291640	6
			1	30	1023	44473	2475473	8
				1	55	3003	191620	10
					1	91	7462	12
						1	140	14
$\overset{2m}{III}(2p)$							1	16
								$2p$

Beispiel.

$$y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9) = -36y^2+49y^4-14y^6+1\cdot y^8.$$

Zu der umgekehrten Transformation benutzt man die Zahlen

$$y^{2m} = \Sigma\overset{2m}{IV}(2p)\cdot y^2(y^2-1^2)(y^2-2^2)\ldots\left(y^2-(p-1)^2\right) \text{ für } p=1,2,\ldots,m. \tag{30}$$

$2m =$ 2	4	6	8	10	12	14	16	$2p$
1	1	1	1	1	1	1	1	2
	1	5	21	85	341	1365	5461	4
		1	14	147	1408	13013	118482	6
			1	30	627	11440	196053	8
				1	55	2002	61490	10
					1	91	5278	12
						1	140	14
$\overset{2m}{IV}(2p)$							1	16
								$2p$

Beispiel.

$$y^8 = 1\cdot y^2+21y^2(y^2-1)+14y^2(y^2-1)(y^2-4)+1\cdot y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9).$$

Führt man $z = 2y + 1$ in (27) ein, erhält man

$$F\left(\frac{z-1}{2}\right) = \frac{F(-1)+F(0)}{2} + \frac{z^2-1}{2\cdot 4}\left\{\frac{\Delta^2(-1)+\Delta^2(0)}{2} + \frac{z^2-9}{6\cdot 8}\left\{ \qquad \right\}\right\} + \frac{z}{2}\left\{\Delta'\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{z^2-1}{4\cdot 6}\left\{\Delta^3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{z^2-9}{8\cdot 10}\left\{ \qquad \right\}\right\}\right\}. \tag{31}$$

Bei der Entwickelung in Potenzreihen können folgende Zahlen, die mir ebenfalls von Oppermann mitgeteilt worden sind, benutzt werden:

$$z(z^2-1)(z^2-9)\ldots\left(z^2-(2m-1)^2\right) = \Sigma(-1)^{m+p}\overset{2m+1}{V}(2p+1)\,z^{2p+1} \quad \text{für } p = 0, 1, \ldots m. \tag{32}$$

$\overset{2m+1}{V}(2p+1) =$

$2m+1$	1	3	5	7	9	11	13	15	$2p+1$
	1	1	9	225	11025	893025	108056025	18261468225	1
		1	10	259	12916	1057221	128816766	21878089479	3
			1	35	1974	172810	21967231	3841278805	5
				1	84	8778	1234948	230673443	7
					1	165	28743	6092515	9
						1	286	77077	11
							1	455	13
								1	15
									$2p+1$

Beispiel.

$$z(z^2-1)(z^2-9)(z^2-25) = z^7 - 35z^5 + 259z^3 - 225z.$$

Zu der umgekehrten Transformation dienen die Zahlen

$$z^{2m+1} = \Sigma\,\overset{2m+1}{VI}(2p+1)\cdot z\cdot(z^2-1)\ldots\left(z^2-(2p-1)^2\right) \quad \text{für } p = 1, 2, \ldots, m \tag{33}$$

$\overset{2m+1}{VI}(2p+1) =$

$2m+1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	$2p+1$
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	10	91	820	7381	66430	597871	5380840	3
			1	35	966	24970	631631	15857205	397027996	5
				1	84	5082	273988	14057043	704652312	7
					1	165	18447	1768195	157280838	9
						1	286	53053	8187608	11
							1	455	129948	13
								1	680	15
									1	17
										$2p+1$

Beispiel.

$$z^7 = z + 91z(z^2-1) + 35z(z^2-1)(z^2-9) + z(z^2-1)(z^2-9)(z^2-25).$$

§ 14.

Sind die Zahlen einer Tafel nicht exakt, ist es von grossem Interesse, die Wirkungen der Fehler sowohl auf Differenzen als auf Interpolationsresultaten zu untersuchen, und da man immer eventuelle Fehler der Argumente auf die Tafel-Werte übertragen kann, von denen die Differenzen wie auch die Interpolationswerte homogene, lineare Funktionen sind, ist diese Aufgabe von keiner besonderen Schwierigkeit. Die Wirkungen der vorliegenden Fehler werden ohne Rücksicht auf die Tafelfunktion dieselben sein, wie bei Interpolation in einer Tafel der Fehler selbst, und diese Wirkung kann zusammengesetzt werden durch Addition der Wirkungen, die jeder einzelne Fehler ausüben würde als Funktion einer Tafel, in der der Funktionswert 0 allen anderen gegebenen Argumenten entspräche.

Nennt man die Fehler, die den Argumenten $a, b, \ldots x$ entsprechen, $\alpha, \beta, \ldots \xi$, wird infolge (4) der Fehler der dividirten Differenz $\delta(a, b, \ldots e, f)$

$$\Sigma \frac{\varphi}{(f-a)(f-b)\ldots(f-e)} \tag{34}$$

sein (falls keine weiteren Fehler durch die Berechnung dieser dividirten Differenz begangen worden sind). In einer geordneten Tafel für eine reelle Funktion von reellem Argument werden in der Spalte für die dividirten Differenzen einer gegebenen Ordnung Fehler mit entgegengesetzten Vorzeichen aufeinander folgen, falls nur in einem der Tafelwerte Fehler gewesen sind, oder wenn nur einer der Fehler die anderen bedeutend an Grösse übertrifft; in diesen Fällen werden zugleich die grössten Fehler auf diejenigen dividirten Differenzen fallen, deren Argumente durchschnittlich dem Argument des grossen Fehlers am nächsten fallen. Hierauf beruht die zur Entdeckung von Rechenfehlern so nützliche Differenzprobe, die nur voraussetzt, dass die dividirten Differenzen mit zunehmender Ordnung normal so stark schwinden werden, dass die Wirkungen der Fehler sichtbar werden. In diesem Falle geben die Vorzeichenwechselungen sowohl an, dass Fehler sich finden, als auch ungefähr, wo man sie suchen muss.

Die Wirkung des einzelnen Fehlers auf das Interpolationsresultat bestimmt man mittelst der Interpolationsformel von Lagrange (7). In dem für das Argument x berechneten Funktionswert X wird sie

$$\xi = \varphi \frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-e)}{(f-a)(f-b)\ldots(f-e)}. \tag{35}$$

Hieraus folgt, dass das Interpolationsresultat, graphisch dargestellt, abweichen wird, wie eine Parabel des Grades der Interpolationsformel von der Abscissenachse abweicht. In den Abscissen $a, b, c, \ldots e$ und sonst nirgends schneidet die Parabel die Abscissenachse. Die mit φ proportionalen Abweichungen sind für grosse

Zwischenräume der gegebenen Argumente verhältnismässig gross. Bei Extrapolation, wo x auf derselben Seite aller Argumente liegt, nehmen die Abweichungen ohne Grenzen zu.

Nimmt man auf die Fehler der sämtlichen Tafelwerte Rücksicht, wird der Interpolationsfehler

$$\xi = \Sigma\varphi \frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-e)}{(f-a)(f-b)\ldots(f-e)}, \tag{36}$$

wo die einzelnen Glieder die Wirkungen von einander zum Teil verstärken, zum Teil schwächen. In der Regel erreicht man nicht oder nur in geringem Grade einige Ausgleichung durch Interpolation.

Sind die Funktionswerte durch ungebundene Beobachtungen gefunden, oder rühren die Fehler von der Abrundung der einzelnen Tafelwerte her, kann das Fehlergesetz für das Interpolationsresultat (von dem Restgliede abgesehen) gefunden werden durch

$$\lambda_r(X) = \Sigma\lambda_r(F)\left\{\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-e)}{(f-a)(f-b)\ldots(f-e)}\right\}^r, \tag{37}$$

wo λ_r die r^{te} Halbinvariante für den in ( ) hinzugefügten Funktionswert bezeichnet, (Thiele: Theory of Observations, C. & E. Layton, London 1903), $\lambda_2(X)$ wird das Quadrat des mittleren Fehlers auf X, und nur auf diese Halbinvariante hat man in der Regel Ursache Rücksicht zu nehmen.

Hieraus gemeingültige praktische Regeln von den mittleren Fehlern der Interpolationen zu ziehen, ist doch nicht leicht; spezielle Voraussetzungen sind zu machen.

Die Wirkung eines leeren Intervalls zwischen den Argumenten einer Tafel kann man beispielsweise dadurch erläutern, dass man infolge (37) λ_2 berechnet unter Voraussetzung von 4 symmetrisch liegenden Argumenten $\pm a$ und $\pm b$, mit Funktionswerten, deren mittlere Fehler gleich gross und $= 1$ sind. Suchen wir hier den mittleren Fehler n für eine Interpolation zum Argumente 0, finden wir

$$2n^2 = \frac{a^4 + b^4}{(a^2 - b^2)^2} \quad \text{oder} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \sqrt{4n^2-1}$$

den für reelle Zahlen möglichst kleinen Wert $n = \sqrt{\frac{1}{2}}$ erreichen wir nur, wenn entweder $\pm a$ oder $\pm b$ sich 0 nähert.

Wenn das mittlere Intervall doppelt so gross ist als die äusseren Intervalle, wird $n^2 = \frac{17}{18}$, und die Genauigkeit wird also noch ein wenig grösser als in den Tafelwerten; aber schon mit einem mittleren Intervall, das 3 Mal so gross ist als die äusseren Intervalle, wird $n^2 = \frac{353}{256}$ und für grössere Zwischenräume wird der Verlust an Genauigkeit immer fühlbarer.

Ausführlichere Erläuterungen über die Wirkungen der Fehler erhält man, wenn vorausgesetzt wird, dass die Tafel äquidistant ist. Bildet man die einfachen Differenzen einer Fehlertafel, die nur einen Fehler von einer Einheit neben lauter korrekten Nullen aufweist

x	X						
—3	0		0		0		1
		0		0		1	
—2	0		0		1		— 6
		0		1		— 5	
—1	0		1		—4		15
		1		—3		10	
0	1		—2		6		—20
		—1		3		—10	
1	0		1		—4		15
		0		—1		5	
2	0		0		1		— 6
		0		0		— 1	
3	0		0		0		1

zeigt sich gleich das Gesetz von den Fehlern der Differenzen durch Binomialquotienten mit wechselnden Vorzeichen. Auf dieser Grundlage erreicht die Differenzprobe, besonders wenn von groben und isolirten Fehlern die Rede ist, eine vorzügliche Schärfe und erlaubt Einem geradezu den Finger auf die Stelle zu setzen, wo der Fehler zu finden sein muss. Erscheinen z. B. in der 5^{ten} Differenz die Zahlen ·07, —·21, +·21, —·07 nacheinander unter lauter kleinen Fehlern, dann kann man wissen, dass die Funktionswerte völlig richtig sein können, dass aber bei der Ausrechnung der 2^{ten} Differenz ein Fehler begangen ist, welcher mit ·07 die Differenz vergrössert hat, die sich dem mittleren Platz der beiden grössten Fehler gegenüber befindet. Die Schwierigkeiten werden grösser, wenn die Fehler dicht liegen, und besonders, wenn es entschieden werden muss, ob etwas schlimmeres vorliegt als die notwendigen Abrundungsfehler.

Mit scharfer Abrundung zur nächsten ganzen Zahl kann es, obwohl nur selten, geschehen, das Fehler von bis $\frac{1}{2}$ mit wechselnden Vorzeichen in einer Reihe von aufeinander folgenden Tafelwerten auftreten; die erste Differenz wird dann Fehler von 1, die zweite von 2, die dritte von 4 Einheiten zeigen können; die r^{te} Differenz kann bis zu 2^{r-1} Einheiten wachsen, also gegen das dobbelte von dem, was isolirte Fehler von 1 Einheit hervorbringen können. Wirkliche Fehler von etwa ein paar Einheiten können also hinter den Abrundungsfehlern versteckt sein oder ohne Grund vermutet werden.

Den Ursprung von kleinen Fehlern nachzuweisen, wird immer schwierig sein.

In einer beobachteten oder abgerundeten Tafel darf man also nicht erwarten, die Differenzen irgend einer Ordnung verschwinden zu sehen, gleichviel ob die Funktion ganz und rational ist. Man kann und muss sich also damit begnügen, die Bildung von Differenzen bis zu einer so hohen Ordnung zu führen, dass die

Vorzeichenwechsel überwiegend häufig, fast beständig werden, und sich dadurch sichern, dass man eine oder einige wenige Ordnungen weiter geht. Ferner kann man sich bei äquidistanten Tafeln sichern durch eine Berechnung des mittleren Fehlers der Differenz höchster Ordnung und ihn mit den Restabweichungen vergleichen. Sind die einzelnen Tafelwerte unter sich ungebunden und gleich genau, und kennt man ferner den mittleren Fehler der zu Grunde liegenden Beobachtungen $\lambda_2(o)$ oder die Genauigkeit der Abrundung (bei strenger Abrundung zum nächsten Ganzen ist der mittlere Fehler $= (12)^{-\frac{1}{2}}$ der betreffenden Einheit), dann ist das Quadrat des mittleren Fehlers auf der n^{ten} Differenz

$$\lambda_2(\Delta^n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \lambda_2(0). \tag{38}$$

Bei strenger Abrundung beträgt der mittlere Fehler selbst in Einheiten der abgerundeten Ziffer für

Ordnung	Mittl. Fehler	Ordnung	Mittl. Fehler
0	·29	4	2·42
1	·41	5	4·58
2	·71	6	8·77
3	1·29		

Fallen etwa zwei Drittel der numerischen Werte der letzten Differenz unter diese Grenzen, sind die Fehler der Tafel unbedeutend klein zu nennen.

Die Differenzen einer Tafel dürfen nicht unter sich als freie Funktionen der beobachteten oder abgerundeten Tafelwerte betrachtet werden, wenn sie von denselben Argumenten abhängig sind. Aus ihnen darf man nicht den mittleren Fehler für das Resultat der Interpolation berechnen, aber dieses findet man sehr leicht direkt aus (37).

Bezeichnen wir die mittleren Fehler der Tafelwerte und des interpolirten X mit entsprechenden griechischen Buchstaben und die Argumente mit $r', r'', \ldots r^{(n+1)}$, haben wir

$$\xi^2 = \Sigma \rho'^2 \left\{ \frac{(x-r'')\ldots(x-r^{(n+1)})}{(r'-r'')\ldots(r'-r^{(n+1)})} \right\}^2$$

für $x = r^{(i)}$, ist also $\xi = \rho^{(i)}$. Im Allgemeinen ist ξ^2 eine Funktion des $2n^{\text{ten}}$ Grades von x, welche ohne Ausgleichung — denn für $x = r^{(i)}$ ist $\xi = \rho^{(i)}$ — den aufgegebenen mittleren Fehlern der zur Interpolation benutzten Tafelwerte genügt.

Dasselbe gilt aber schon von einer Funktion des n^{ten} Grades,

$$\varepsilon^2 = \Sigma \rho'^2 \frac{x-r''}{r'-r''} \cdots \frac{x-r^{(n+1)}}{r'-r^{(n+1)}},$$

welche, wenn der mittlere Fehler des Tafelwertes konstant ist, sich zu dem Quadrate dieser Konstante selbst reduzirt.

Die Differenz $\xi^2 - \varepsilon^2$ wird also wenigstens in diesem Falle zeigen, inwiefern die Interpolation innerhalb und ausserhalb der verschiedenen Intervalle das Quadrat des mittleren Fehlers über die eigene Norm der Tafel hinaus vergrössert oder verkleinert. Aber $\xi^2 - \varepsilon^2$ verschwindet für alle $n+1$ Argumente identisch; wir müssen also haben

$$\xi^2 = \varepsilon^2 + (x-r')(x-r'')\dots(x-r^{(n+1)})\overset{n-1}{F}(x), \tag{39}$$

wo $\overset{n-1}{F}(x)$ eine ganze rationale Funktion des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist. Eine Bestimmung der Wurzeln in $\overset{n-1}{F}(x) = 0$ wird dadurch von Interesse sein, dass sie zeigt, in welchen Intervallen die Interpolation eine partielle Ausgleichung herbeiführt.

Von besonderem Interesse sind die Fälle bei äquidistanten Tafeln mit konstantem mittleren Fehler; setzen wir hier $\rho = 1$ und rechnen wir die Argumente von der Mittelzahl der bei der Interpolation benutzten Argumente aus, sind für Interpolation des

		Neue Wurzeln
0^{ten} Grades	$\xi^2 = 1$	
1^{sten} Grades	$\xi^2 = 1 + \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{2!} \cdot 4$	
2^{ten} Grades	$\xi^2 = 1 + \frac{x(x^2-1)}{3!} \cdot 9x$	$x = 0$
3^{ten} Grades	$\xi^2 = 1 + \frac{(x^2-\frac{1}{4})(x^2-\frac{9}{4})}{4!} \cdot \frac{40x^2-46}{3}$	$x = \pm 1{\cdot}07$
4^{ten} Grades	$\xi^2 = 1 + \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5!} \cdot \frac{175x^3-575x}{12}$	$x = \begin{cases} 0 \\ \pm 1{\cdot}81 \end{cases}$
5^{ten} Grades	$\xi^2 = 1 + \frac{(x^2-\frac{1}{4})(x^2-\frac{9}{4})(x^2-\frac{25}{4})}{6!} \cdot \frac{1008x^4-6720x^2+4817}{80}$	$x = \begin{cases} \pm {\cdot}90 \\ \pm 2{\cdot}42 \end{cases}$
6^{ten} Grades	$\xi^2 = 1 + \frac{x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{7!} \cdot \frac{539x^5-6223x^3+13034x}{60}$	$x = \begin{cases} 0 \\ \pm 1{\cdot}66 \\ \pm 2{\cdot}97 \end{cases}$

Hiernach kann kein Zweifel mehr walten, dass der Regel nach alle neuen Wurzeln für $\overset{n-1}{F}(x) = 0$ reell sind. Ausserhalb der äussersten benutzten Argumente (Extrapolation) ist der mittlere Fehler immer vergrössert, ebenfalls aber nur schwach in den inneren Teilen der Intervalle, die von den neuen Wurzeln geteilt werden. Verkleinert ist der mittlere Fehler in den äussersten Teilen dieser Intervalle und in dem ganzen mittleren Intervall oder (für gerades n) in den beiden mittleren Intervallen, ausgenommen wenn eben $x = 0$ ist.

Dass die Extrapolation grosse Unsicherheit mit sich führt, beruht auf der Schnelligkeit, womit die eben erwähnten Funktionen des $2n^{\text{ten}}$ Grades für $\lambda_2 = \xi^2$ zunehmen, sobald die äussersten der Argumente und damit die Durchschneidungen mit ε^2 passirt sind. Für äquidistante Tafeln mit konstanter Genauigkeit wird dies

erläutert durch folgende Tafel, welche angiebt, wie hoch der mittlere Fehler und sein Quadrat über dem $\xi = 1$ der Tafel steigt bei Extrapolation von nur $\frac{1}{2}$ und 1 Intervall ausserhalb des äussersten benutzten Arguments, m.

	$m+\frac{1}{2}$		$m+1$	
Grad der Interpolation	ξ^2	ξ	ξ^2	ξ
1ster	$\frac{5}{2}$	1·6	5	2·2
2ter	$\frac{167}{32}$	2.3	19	4·4
3ter	$\frac{729}{64}$	3·4	69	8·3
4ter	$\frac{226067}{8192}$	5·3	251	15·8
5ter	$\frac{1216891}{16384}$	8·6	923	30·4
6ter	$\frac{56913739}{262144}$	14·7	3431	58·6

Man sieht aus den Tafelwerten für ξ, dass Extrapolation nach schräger Linie nach (17) oder (18) selbst unter vorsichtiger Anwendung misslich wird. Eine oder mehrere Ziffern des Resultates werden dadurch unsicher. Bei Interpolation nach schräger Linie muss deshalb beachtet werden, dass sie nicht in Extrapolation ausartet, sondern dass das Argument der Interpolation immer noch zwischen den Argumenten der Tafel liegen bleibt. In dieser Weise kann, wie wir eben gesehen haben, eine kleine Verbesserung der Genauigkeit dadurch erreicht werden; diese wird aber in jedem Falle etwas fraglich sein und schlägt leicht in das Gegenteil über. Die Interpolation in der Seitenlinie des Argumentes, nach den Formeln (23) bis (25) und (26) und (27), ist vorzuziehen, weil immer mit Interpolation in den beiden mittleren Intervallen ein wenig Ausgleichung verbunden ist.

Ist eine eigentliche Extrapolation beabsichtigt, z. B. zur Entscheidung von Fragen über die Möglichkeit einer Erweiterung der Tafel über ihre ursprünglichen Grenzen hinaus, und erstreckt sich die Extrapolation über mehrere Intervalle, ist immer zu beachten, dass eine oder mehrere Ziffern ihre Genauigkeit einbüssen, besonders bei Anwendung von Differenzen höherer Ordnungen. Dabei hat es weniger zu sagen, dass der mittlere Fehler selbstverständlich durch unvorsichtige Abrundung in der Interpolationsrechnung selbst noch mehr vergrössert werden kann. Dagegen können sogar unbegrenzt grosse Fehler durch das Nichtkennen des Restgliedes in der Interpolationsformel Newtons entstehen. Hat man keine guten Gründe zu meinen, dass dieses Restglied unbedeutend sei, ist es das klügste, sich jeder Extrapolation zu enthalten.

§ 15.

Von Tafeln zum allgemeinen Gebrauch fordert man, dass die Interpolation, wenn hinreichend viele Glieder der Formel Newtons mitgenommen werden, die richtigen Funktionswerte unmittelbar angebe. Die Interpolationsrechnung muss deshalb Mittel geben zu untersuchen, inwiefern dieser Forderung Genüge geleistet ist, so dass man ohne Rücksicht auf das Restglied interpoliren kann; dadurch wird man gezwungen, auch die unendlichen Interpolationsreihen zu betrachten.

Falls die dividirten Differenzen für keine endliche Ordnung konstant und 0 werden, wird die Interpolationsformel Newtons eine unendliche Reihe, und vorausgesetzt, dass man unendlich viele, einer gesetzlich geordneten Unendlichkeit von Argumenten entsprechende Tafelwerte kennt, können diese unendlichen Reihen bestimmte und übersehbare Formen annehmen. Es genügt indessen nicht, dass die Form der Reihe klar ist; unendliche Reihen können bestimmte Werte haben, sie können aber auch zwischen mehreren Werten schwanken, wie zum Beispiel $1-1+1-1+1-1$ ewig zwischen 0 und 1 schwankt. Nur in dem ersteren Falle kann der Reihe unmittelbare Bedeutung beigelegt werden. Ist der Wert, dem sich die Reihe nähert, eine endliche Zahl, nennt man die Reihe konvergent. In den anderen Fällen nennt man sie divergent, welcher Name also sowohl die schwankenden Reihen umfasst als diejenigen, die wegen der Unendlichkeit ihres Wertes nur mit besonderer Vorsicht benutzt werden dürfen.

Ist in einer unendlichen Summe $u_1+u_2+\ldots=\Sigma u_n$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$ das Grenzglied u_∞ unendlich gross oder endlich, ist die Reihe also divergent; dass aber $u_\infty=0$ ist, ist nur eine notwendige und keine genügende Bedingung der Konvergenz der Reihe; denn eine Summe von unendlich vielen Addenden, welche sich alle 0 nähern oder gleich sind, ist im Allgemeinen unbestimmt und kann unendlich gross sein.

Den direkten Beweis der Konvergenz einer Reihe hat man, wenn man sein Restglied r_{n+1} für jede Ordnung, n, kennt, das heisst die Summe der nach dem n^{ten} Gliede rückständigen unendlich vielen Glieder, und wenn es sich zeigt, dass das Restglied für unendlich hohe Ordnung sich einem konstanten Werte, $r_\infty=k$, nähert. (Wenn gefordert wird, dass der bei der Bildung der Reihe oder Angabe des Restgliedes beabsichtigte Wert der Reihe mit der Summe aller Glieder von endlicher Ordnung einer konvergenten Reihe eindeutig übereinstimmen soll, muss $k=0$ sein.)

Mittelbar kann man die Konvergenz beweisen durch Vergleich mit einer sicher konvergenten Reihe, besonders einer solchen, dessen Glieder alle mehr als die entsprechende der vorgelegten Reihe von 0 abweichen und zwar nach derselben Seite.

Der direkte Beweis der Konvergenz setzt fast mit Notwendigkeit voraus, dass das Restglied in recht einfacher Form vorliegen muss. Beispiele lassen sich unschwer finden. Die Interpolations-Rechnung bietet eine Anzahl solcher, die zum Vergleiche in dem mittelbaren Beweise nützlich sind. In der allgemeinen Formel Newtons (5) ist das Restglied enthalten.

Zu den als Beispiele für § 5,7 und § 7 angeführten Fällen mit einfachen Restgliedern kann hier die Interpolationsformel der Potenz-Funktion x^{-n} mit negativen ganzen Exponenten gefügt werden. Wenn der Kürze wegen die r^{te} dividirte Differenz von x^{-n} durch Hinschreiben des Exponenten $-n$ als Index angedeutet wird, hat man

$$\delta^r_{-n}(a, b, \ldots, g, h) = \frac{(-1)^r}{a \,.\, b \ldots . \, g \,.\, h} \delta^r_{r+n-1}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{g}, \frac{1}{h}\right),$$

was nach (4) durch Kürzung des Bruches bewiesen wird. Die r^{te} dividirte Differenz von x^{r+n-1} ist nach § 5, 5 bekannt, und so reduzirt sich der Ausdruck rechter Hand und indem man das 4^{te} Glied das Restglied darstellen lässt, ist

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{a}\left(1+\frac{a-x}{b}\left(1+\frac{b-x}{c}\left(1+\frac{c-x}{x}\right)\right)\right),\\
\frac{1}{x^2} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{a-x}{b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{b-x}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{c-x}{x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right),\\
\frac{1}{x^3} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{aa}+\frac{a-x}{b}\left(\sum_a^b\frac{1}{bb}+\frac{b-x}{c}\left(\sum_a^c\frac{1}{cc}+\frac{c-x}{x}\left(\sum_a^c\frac{1}{cc}+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{xx}\right)\right)\right)\right),
\end{aligned}\right\}\quad(41, 0)$$

wo Σ alle Produkte mit wiederholten so wie nicht wiederholten Faktoren umfasst.

Die Argumente a, b, c können hier ganz beliebig gewählt werden und verschwinden identisch aus dem Resultate. Unsere Formeln haben deshalb eine äusserst ausgedehnte Allgemeinheit. Es genügt hier $a, b, c, \ldots .$ ganz einfachen Gesetzen zu unterwerfen.

Setzt man $a = b = c = \ldots$, und schreibt man der Kürze wegen $\frac{a-x}{a} = z$, erhält man

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots+z^{n-1}+\frac{z^n}{1-z}, \quad (41, 1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= 1+2z+3z^2+4z^3+5z^4+\ldots+nz^{n-1}+\left(1+n(1-z)\right)\frac{z^n}{(1-z)^2},\\
\frac{1}{(1-z)^3} &= 1+3z+6z^2+10z^3+15z^4+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}z^{n-1}+\left(1+n(1-z)+\frac{n(n+1)}{2}(1-z)^2\right)\frac{z^n}{(1-z)^3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\frac{1}{(1-z)^s} &= 1+sz+\ldots+\frac{(n+s-2)!}{(n-1)!\,(s-1)!}z^{n-1}+r_{n+1},
\end{aligned}\right\}\quad(41, 2)$$

wo nach den n ersten Gliedern das Restglied ist

$$r_{n+1} = \left(1+n(1-z)+\ldots+\frac{(n+s-2)!}{(n-1)!\,(s-1)!}(1-z)^{s-1}\right)\frac{z^n}{(1-z)^s}. \qquad (41,3)$$

Eine Menge von Reihen können als Summen von Gliedern dieser Formen gebildet werden.

Man beweist in der direkten Weise, dass die Reihen (41, 1 und 2) alle konvergent sind, wenn $(z)^\infty = 0$, das heisst, wenn $|z|$, der Modulus von z kleiner als 1 ist.

Ist $|z| > 1$, ist die Reihe divergent. Die Reihen (41, 1 und 2) sind auch dann divergent, wenn z eine Wurzel der Einheit ist, $|z| = 1$, dann wird z^∞ freilich nicht unendlich gross, aber jedenfalls ist das Restglied dann nicht konstant.

Mit $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, u. s. w. giebt (41, 0)

$$\frac{1}{x} = 1+\frac{1-x}{2}\left(1+\frac{2-x}{3}\left(1+\ldots+\frac{n-1-x}{n}\left(1+\frac{n-x}{x}\right)\right)\right) \qquad (41,4)$$

mit dem Restgliede

$$r_{n+1} = \frac{1-x}{x}\cdot\frac{2-x}{2}\cdot\frac{3-x}{3}\cdots\frac{n-x}{n}. \qquad (41,5)$$

Zur überschlägigen Berechnung dieses Restgliedes dient, dass

$$\frac{-1}{\log\frac{n-m}{n}} = \frac{n-\frac{1}{2}m}{m}+\ldots$$

die Anzahl von Faktoren ist, gleichmässig um $\frac{n-m}{n}$ verteilt, deren Produkt $= \frac{1}{e}$ $= \cdot 36788$ ist. Wenn die rechte Seite von (41, 5) in solchen Partialprodukten aufgelöst wird, deren Faktorenzahl mit $n-\frac{1}{2}m$ ungefähr proportional genommen wird, werden sich diese Partialprodukte mit wachsendem n einem konstanten Wert nähern, der ein echter Bruch sein wird, wenn x einen positiven beliebig kleinen Wert hat. Als Produkt unendlich vieler solcher Werte muss r_{n+1} für $n = \infty$ sich 0 nähern. Die Reihe (41, 4) ist konvergent oder divergent, je nachdem x positiv oder negativ ist; für $x = 0$ ist $\frac{1}{x} = \infty$.

Jede eindeutige Funktion der Ordnungszahl n kann als ein allgemeines Restglied r_n aufgefasst werden. Die Glieder der entsprechenden Reihe werden dann $u_n = r_n - r_{n+1}$. Der Zahlenwert der Reihe wird $= r_1$ und die Summe der ersten n Glieder $s_n = r_1 - r_{n+1}$. Mit

$$r_{n+1} = \frac{n!}{(p+n)!}$$

findet man

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1},\\
\frac{1}{1\cdot 2} &= \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\frac{1}{p!} &= \frac{p}{(p+1)!}+\frac{p\cdot 1!}{(p+2)!}+\dots+\frac{p(n-1)!}{(p+n)!}+\frac{n!}{(p+n)!}.
\end{aligned}\right\} \quad (41, 6)$$

Diese Reihen sind (p positiv) alle konvergent. Divergent sind ($p=0$)

$$\log\frac{1}{(1-1)} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

und ($p=-1$)

$$\frac{1}{1-1} = 1+1+\dots+1\dots$$

Die identische Gleichung

$$\sqrt{x} = a_1+\frac{x-a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{x-s_2^2}{s_2+a_3}+\dots+\frac{x-s_{n-1}^2}{s_{n-1}+a_n}+\frac{x-s_n^2}{s_n+\sqrt{x}} \qquad (41, 7)$$

mit beliebigen Zahlen für a_r und mit s_r als die Summe der r ersten Glieder, stellt den Kettenbruch (173) als Summe dar. Sie giebt uns ein beachtenswertes Beispiel eindeutiger Reihen mit zweideutigem Restglied und Wert.

Praktische Vollkommenheit erlangt diese Reihe, wenn man überall $a_r = s_{r-1}$ setzt, und also bei jedem Schritte die schon erlangte Annäherung benützt. So ist das Restglied

$$r_{n+1} = \frac{2\sqrt{x}}{1-\left(\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}\right)^{2^{n-1}}} \qquad (n>1)$$

mit a als beliebige Annäherung an $\sqrt{x}$. Die Reihe konvergirt im Allgemeinen, und zwar nach demjenigen der beiden Werte von $\sqrt{x}$, der am wenigsten von a abweicht. Nur wenn $\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$ eine von 1 verschiedene Wurzel der Einheit ist, d. h., wenn $\frac{\sqrt{x}}{a}$ rein imaginär ist, wird sie divergent. Die Form dieser Reihe ist

$$\sqrt{x} = a+\frac{x-a^2}{2a}\left(1+\frac{a^2-x}{2(a^2+x)}\left(1+\frac{1}{\omega_1}\left(1+\frac{1}{\omega_2}\left(1+\dots+\frac{1}{\omega_{n-1}}\left(1+\left(\frac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}\right)^{2^n}\right)\right)\right)\right)\right), \quad (41, 8)$$

wo $\omega_{s+1} = \omega_s^2-2$ und $\omega_0 = 2\frac{a^2+x}{a^2-x}$. Die Zahlen ω_s sind also durch x und a eindeutig bestimmt, was man aus der expliziten Form,

$$\omega_s = \left(\frac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}\right)^{2^s}+\left(\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}\right)^{2^s},$$

nicht so einfach erkennt.

Durch Vergleichung mit solchen Reihen, deren Restglieder bekannt sind, hat man ein System von Kennzeichen gefunden, durch welche die Konvergenz beziehungsweise Divergenz einer Reihe bewiesen werden kann, wenn auch ihr Restglied unbekannt bleibt.

Das wichtigste Kennzeichen verdankt man Cauchy. Nennen wir Quote des n^{ten} Gliedes das Verhältnis des Gliedes u_n zum nächst folgenden u_{n+1}

$$q_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}. \tag{42, 0}$$

Ihr Grenzwert, die Grenz-Quote

$$q_\infty = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}, \tag{42, 1}$$

entscheidet die Hauptfrage. Wenn ihre Grösse (oder ihr Modulus) $|q_\infty| > 1$, ist die Reihe konvergent, wenn $|q_\infty| < 1$, ist sie divergent. Unentschieden bleiben die Fälle, wo die Grenz-Quote eine Wurzel der Einheit ist.

Der briggische Logarithmus der Quote zeigt an, wie viele Dezimalstellen die Berechnung des n^{ten} Gliedes herbeiführt. Ist die Grenz-Quote z. B. $= \frac{5}{4}$, ihr Logarithmus ·097, dann müssen am Schluss der Reihe mehr wie 10 Glieder für jede Dezimalstelle verwendet werden.

In der Praxis sind die Forderungen an Konvergenz strenger als in der Theorie. Reihen, die mit wenig Gliedern nicht berechnet werden können, können überhaupt nicht berechnet werden. Cauchys Kennzeichen reicht zur Entscheidung nicht aus. Oft entscheidet eben der Anfang der Reihe. Eine Reihe mit unendlich grosser Grenz-Quote kann durch verzögerten Anfang unbrauchbar werden. Und eine fast divergente Reihe kann andrerseits schnell zum Ziele führen. Auch an der Grenze der endlich grossen Ordnungszahlen hängt vieles davon ab, in welcher Art und Weise sich die Quote der Grenz-Quote nähert.

Duhamel hat ein secundäres Kennzeichen der Konvergenz gegeben, dass in etwas verallgemeinerter Form von grosser Bedeutung ist.

Wenn die Grenz-Quote einer Reihe eine bestimmte endliche Zahl ist, nenne ich

$$q_n' = n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = n\left(1 - \frac{q_\infty}{q_n}\right) \tag{42, 2}$$

den Charakter der Reihe, wie er am n^{ten} Gliede gefunden wird. Der Grenz-Wert des Charakters oder der Grenz-Charakter,

$$q_\infty' = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} n\left(1 - \frac{q_\infty}{q_n}\right), \tag{42, 3}$$

entscheidet — in komplexen Fällen durch Vorzeichen und Grösse seines reellen Teiles — in den wichtigsten der fraglichen Fälle.

Wenn die Grenz-Quote eine Wurzel der Einheit ist, zeigt ein positiver Grenz-Charakter im Allgemeinen die Konvergenz an, ein negativer die Divergenz.

Nur wenn die Grenz-Quote $= 1$ ist, liegt die Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz bei dem Grenz-Charakter 1 anstatt bei 0. Die dazwischen liegenden Reihen haben unendlich grosse Summen und sind also als divergente anzusehen. Hiermit stimmt, dass Duhamels Kennzeichen der Konvergenz bei $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, die Form, $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$, hat.

Durch solche Prüfung der Beispiele von Reihen mit Restgliedern erhält man:

Formel		Grenz-Quote	Grenz-Charakter
(41, 1)		$\frac{1}{z}$	0
(41, 2)		$\frac{1}{z}$	$1 - s$
(41, 4)		1	$1 + x$
(41, 6)		1	$1 + p$
(41, 8)	allgemein	∞	unbestimmbar
	$\sqrt{x}$ imaginär	schwankend	unbestimmbar
	$\sqrt{x} = 0$	2	0

Halb-konvergente nennt man solche divergente Reihen, für welche die Summe s_n der ersten Glieder in angeblicher Anzahl n als Annäherung oder Andeutung des Wertes noch angesehen werden können.

Stellen, wo man so die Reihe abbrechen könnte, müssten da gesucht werden, wo das allgemeine Glied einen minimalen Modulus zeigt.

Zeigt eine Reihe bei wachsender Ordnungszahl n mehrere Minima von $|u_n|$, unterbricht man die Reihe erst bei der letzten dieser Minima, nach welchem die Glieder bis $n = \infty$ alle stetig anwachsen müssen.

Wenn die Quote der Reihe sich in dieser Weise einem negativen oder komplexen Wert der Grenz-Quote nähert, ordnen sich die späteren Werte von s_n um einen solchen Wert, dass ihre Abweichungen von diesen nach der Grösse des letzten Gliedes u_n geschätzt werden können. In der Nähe des Minimums sind diese Abweichungen am kleinsten, und umgekehrt kann man auch da, aus den letzten Werten von s_n am schärfsten auf den mittleren Wert schliessen, der als der eigene Wert der Reihe angesehen werden darf.

Wenn die Grenz-Quote positiv ist, kann man zwar nicht so die Unsicherheit beurteilen. Nach Analogie wird man aber auch in diesen Fällen die Reihe an der Stelle unterbrechen, wo $|u_n|$ am kleinsten ist.

Wenn es kein Minimum für $|u_n|$ giebt, ist die Reihe rein divergent, keineswegs halb-konvergent.

Wenn aber auch die halb-konvergenten Reihen bisweilen sehr scharf und nützlich sein können, ist man doch in vielen Fällen mit ihnen schlimmen

Täuschungen ausgesetzt, besonders wenn man in der Praxis nach einer kleinen Anzahl der ersten Glieder urteilen muss.

Der Grenz-Charakter bietet — und zwar unabhängig von der Grenz-Quote — ein Kennzeichen der Halb-Konvergenz im Gegensatz zu der reinen Divergenz. Aus (42, 2) ergiebt sich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n - q'_n}{n q_\infty}:$$

Wo der Charakter q'_n eine negative Zahl ist, kann kein Minimum von $|u_n|$ Statt finden. Bei negativem Grenz-Charakter q'_∞ darf keine Reihe als halb-konvergent angesehen werden.

Wenn aber der Grenz-Charakter q'_∞ positiv ausfällt, kann man im weiteren Sinne des Wortes die Reihe als halb-konvergent bezeichnen. Jedoch ist auch so immer grosse Vorsicht bei ihrer Anwendung nötig.

Um die Konvergenz-Bedingungen auf die allgemeine Interpolationsformel Newtons anzuwenden, schreibt man dieselbe zweckmässig

$$X = A\left(1 + (x-a)\frac{\delta(a, b)}{A}\left(1 + (x-b)\frac{\delta(a, b, c)}{\delta(a, b)}(1 + \ldots\right.\right.$$

Wenn man die Argumente als eine nach Ordnungszahlen geordnete Reihe a_n auffasst, wird die Quote

$$q_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\delta^{(n-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{(x-a_n)\,\delta^n(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})}. \tag{43, 0}$$

Wenn die Grenz-Quote sich bestimmen lässt, entweder durch theoretische Bestimmung der dividirten Differenzen, oder durch praktische Schätzung aus den höchsten erreichbaren Ordnungen, hat man für den Charakter

$$q'_n = n\left(1 - \frac{(x-a_n)\,\delta^n(a_1, \ldots, a_{n+1})}{\delta^{(n-1)}(a_1, \ldots, a_n)}\,q_\infty\right). \tag{43, 1}$$

Bei äquidistanten Argumenten stellen sich diese Formeln nur wenig einfacher. Für die Interpolation nach abwärts gehender schräger Linie (19), hat man

$$q_n = \frac{y+1-n}{n}\,\frac{\Delta^n\left(\frac{n}{2}\right)}{\Delta^{(n-1)}\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{43, 2}$$

und

$$q'_n = n - \frac{q_\infty\,\Delta^{(n-1)}\left(\frac{n-1}{2}\right)}{(y+1-n)\,\Delta^n\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{43, 3}$$

Für aufwärts gehende schräge Linie (20) dagegen

$$q_n = \frac{y-1+n}{n}\,\frac{\Delta^n\left(-\frac{n}{2}\right)}{\Delta^{n-1}\left(\frac{1-n}{2}\right)} \tag{43, 4}$$

und

$$q_n' = n - \frac{q_\infty \, \Delta^{(n-1)}\left(\frac{1-n}{2}\right)}{(y-1+n)\,\Delta^n\left(-\frac{n}{2}\right)}. \tag{43, 5}$$

Bei Interpolationen nach Zig-Zag-Linien ((23)—(28)) muss man im Allgemeinen auf Schwankungen der Grenz-Quote oder des Grenz-Charakters vorbereitet sein. Es empfiehlt sich in solchen Fällen die Reihe in eine Summe zweier oder mehrerer Reihen aufzulösen, die alle in regulärer Weise verlaufen können.

Beispiel 1. In einer Tafel stellen die Argumente alle ganze reelle Zahlen dar, und die Werte der Funktion sind abwechselnd $f(2r) = 1$ und $f(2r+1) = -1$. Eine einseitige Interpolation nach von $x = 0$ abwärtsgehender schräger Linie giebt dann

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{1}\left(1 + 2\frac{1-x}{2}\left(1 + \ldots + 2\frac{n-1-x}{n}\left(1 + \ldots\right.\right.\right.$$

Die Grenz-Quote ist hier $= \frac{1}{2}$, der Grenz-Charakter $= 1 + x$. Die divergente Reihe ist halb-konvergent, jedoch ungünstigster Art, wegen positiver Quote. Indessen lohnt es sich zu untersuchen, welchen Wert s_n annimmt, wenn man die Reihe unmittelbar vor dem kleinsten Gliede abbricht.

Wendet man die ganze Tafel an — durch Interpolation nach (23)—(25) —, erhält man Reihen, deren Quoten zwischen 2 verschiedenen Formen beständig wechseln. Bildet man aus den Gliedern beziehungsweise gerader und ungerader Ordnung eine Summe von zwei Reihen, findet man für beide die Grenz-Quote $= 1$ und den Grenz-Charakter $= \frac{1}{2}$. Beide sind unendlich gross oder divergent.

Die Formeln (26) und (27) geben dagegen konvergente Resultate und zwar — indem wir die Funktionen mit $\cos \pi x$ und $\sin \pi x$ identifiziren (§ 19) —

$$\cos \pi x = 1 - \frac{4x^2}{1\cdot 2}\left(1 + \frac{4(1-x^2)}{3\cdot 4}\left(1 + \frac{4(4-x^2)}{5\cdot 6}\left(1 + \ldots + 2\frac{(m-1)^2 - x^2}{(2m-1)m}\left(1 + \ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$\sin \pi x = 2x\left(1 + \frac{1-4x^2}{2\cdot 3}\left(1 + \frac{9-4x^2}{4\cdot 5}\left(1 + \ldots + \frac{(2m-1)^2 - 4x^2}{2m(2m+1)}\left(1 + \ldots\right.\right.\right.\right.$$

und speziell,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1 + \frac{9}{4\cdot 5}\left(1 + \frac{25}{6\cdot 7}\left(1 + \ldots + \frac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}\left(1 + \ldots\right.\right.\right.\right.$$

weil $\pi = \dfrac{\sin \pi x}{x}$ für $x = 0$. Die Grenz-Quoten sind hier $= 1$, die Grenz-Charaktere $= \frac{3}{2}$. Zu direkter Berechnung sind diese Reihen fast unbrauchbar.

Beispiel 2. Der Aufgabe in Beispiel 1 füge man hinzu, dass der Differentialquotient der Funktion $= 0$ ist, sowohl wenn die Funktion $= +1$ als $= -1$ wird. Interpolation auf Linie mit dem Argumente 0 und $-\frac{1}{2}$ giebt hier

$$\cos \pi x = 1 - \frac{2x^2}{1\cdot 1}\Big(1 + \frac{2(1-x^2)}{1\cdot 2}\Big(1 + \frac{2(1-x^2)}{3\cdot 3}\Big(1 + \ldots + \frac{2((n-1)^2 - x^2)}{(2n-1)^2}\Big(1 + \frac{2(n^2-x^2)}{(2n-1)2n}\Big(1 + \ldots$$

$$\sin \pi x = 2x\Big(1 + \frac{2(1-4x^2)}{2\cdot 2}\Big(1 + \frac{2(1-4x^2)}{4\cdot 6}\Big(1 + \ldots + \frac{(2n-1)^2 - 4x^2}{2(2n-1)^2}\Big(1 + \frac{(2n-1)^2 - 4x^2}{4n(2n+1)}\Big(1 + \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{12}\Big(1 + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{9}{40}\Big(1 + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{25}{84}\Big(1 + \ldots + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{(2n-1)^2}{4n(2n+1)}\Big(1 + \ldots,$$

alle Reihen sind hier für endliche x konvergent, die Grenz-Quote $= 2$, der Grenz-Charakter schwankt, wenn man die Reihen nicht nach gerader und ungerader Ordnung teilt. Die Berechnung ist recht bequem.

Beispiel 3. Die in den vorigen Beispielen interpolirte periodische Funktion hat den Wert 0 in der Mitte jedes Intervalls; nimmt man dies in die Tafel mit, so dass dieselbe nur dahin lautet, dass $f(4n) = 1$, $f(2n+1) = 0$ und $f(4n+2) = -1$, erhält man bei Interpolation auf den Linien der Argumente 0 und -1

$$\cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 1}\Big(1 + \frac{1-x^2}{2\cdot 3}\Big(1 + \frac{4-x^2}{3\cdot 5}\Big(1 + \ldots + \frac{n^2-x^2}{(n+1)(2n+1)}\Big(1 + \ldots$$

$$\sin\frac{\pi x}{2} = x\Big(1 + \frac{1-x^2}{1\cdot 3}\Big(1 + \frac{4-x^2}{2\cdot 5}\Big(1 + \ldots + \frac{n^2-x^2}{n(2n+1)}\Big(1 + \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{2}{5}\Big(1 + \frac{3}{7}\Big(1 + \frac{4}{9}\Big(1 + \ldots + \frac{n}{2n+1}\Big(1 + \ldots$$

welche alle in demselben Grade wie im vorigen Beispiel konvergent sind.

Beispiel 4. Der Tafel für Beispiel 3 fügen wir noch hinzu, dass die Differentialquotienten für die geraden Argumente $= 0$ sind. So ist das Gesetz der dividirten Differenzen recht einfach; sie sind in jeder Differenzenspalte Brüche, deren Zähler 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, u. s. w. sind, während die Nenner die Produkte der Argumentdifferenzen sind, von denen die ungeraden Zahlen wiederholt werden.

Die Nenner der Differenzen von der $3m^{\text{ten}}$ Ordnung sind $\dfrac{\cdots\cdots\cdots}{2m!\ 1\cdot 3 \ldots (2m-1)}$

» » » » $3m+1^{\text{ten}}$ » » $\dfrac{\cdots\cdots\cdots}{(2m+1)!\ 1\cdot 3 \ldots (2m-1)}$

» » » » $3m+2^{\text{ten}}$ » » $\dfrac{\cdots\cdots\cdots}{(2m+1)!\ 1\cdot 3 \ldots (2m+1)}$.

Hieraus folgt

$$\cos\frac{1}{2}\pi x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 1}\Big(1 + \frac{1-x^2}{2\cdot 3}\Big(1 + \frac{4-x^2}{3\cdot 4}\Big(1 + \frac{4-x^2}{5\cdot 5}\Big(1 + \frac{9-x^2}{6\cdot 7}\Big(1 + \frac{16-x^2}{7\cdot 8}\Big(1 + \frac{16-x^2}{9\cdot 9}\Big(1 + \ldots,$$

wo die allgemeinen Glieder sind

$$\frac{(2n)^2-x^2}{(4n-1)\,4n}\Bigl(1+\frac{(2n)^2-x^2}{(4n+1)^2}\Bigl(1+\frac{(2n+1)^2-x^2}{(4n+2)(4n+3)}\Bigl(1+\ldots,$$

$$\sin\frac{\pi x}{2}=x\Bigl(1+\frac{1-x^2}{1\cdot 2}\Bigl(1+\frac{1-x^2}{3\cdot 3}\Bigl(1+\frac{4-x^2}{4\cdot 5}\Bigl(1+\frac{9-x^2}{5\cdot 6}\Bigl(1+\frac{9-x^2}{7\cdot 7}\Bigl(1+\frac{16-x^2}{8\cdot 9}\Bigl(1+\ldots$$

mit den allgemeinen Gliedern

$$\frac{(2n-1)^2-x^2}{(4n-1)^2}\Bigl(1+\frac{(2n)^2-x^2}{4n(4n+1)}\Bigl(1+\frac{(2n+1)^2-x^2}{(4n+1)(4n+2)}\Bigl(1+\ldots$$

und für π hat man

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}\Bigl(1+\frac{1}{9}\Bigl(1+\frac{1}{5}\Bigl(1+\frac{3}{10}\Bigl(1+\frac{9}{49}\Bigl(1+\frac{2}{9}\Bigl(1+\frac{5}{18}\Bigl(1+\frac{25}{121}\Bigl(1+\frac{3}{13}\Bigl(1+\frac{7}{26}\Bigl(1+\frac{49}{225}\Bigl(1+\ldots$$

mit den allgemeinen Gliedern

$$\frac{2n-1}{8n-6}\Bigl(1+\frac{(2n-1)^2}{(4n-1)^2}\Bigl(1+\frac{n}{(4n+1)}\Bigl(1+\ldots$$

die 12 angegebenen Glieder bestimmen 6 Dezimalen von π; mit je 5 Gliedern erhält man noch 3 Dezimalen, indem die Grenz-Quote sich 4 nähert.

Dass die in diesen Beispielen gefundenen Reihen wirkliche Sinus und Cosinus Funktionen wie auch die Zahl π darstellen, kann man auf diesem Standpunkte nicht beweisen; es wird vorläufig dadurch bestätigt, dass man bei Interpolation $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ findet. Nimmt man auch diese beiden rationalen Fälle in die Tafel mit, bekommen die Interpolationsformeln die grosse Grenz-Quote 8, jedes der ersten Glieder fügt dem Resultate eine richtige Ziffer hinzu; es ist aber schwierig die allgemeine Form der Glieder zu finden, indem 5 Typen davon in jeder Reihe auftreten.

Beispiel 5. Indirekte Interpolation, wobei es vorausgesetzt wird, dass das Argument der Tafel gegen den Funktionswert umgetauscht ist, wendet man z. B. dazu an, Logarithmen durch eine Tafel der Antilogarithmen zu bestimmen. Ist diese äquidistant, müssen also bei der Interpolation $1, a, a^2 \ldots a^n$ als Argumente beziehungsweise von den Funktionswerten $0, 1, 2 \ldots n$ aufgefasst werden. Für die dividirte Differenz findet man leicht den allgemeinen Ausdruck

$$\delta(a^m, \ldots, a^n)=\frac{(-1)^{n-m+1}\cdot a^{\frac{(m-n)(m+n-1)}{2}}}{a^{n-m}-1}$$

und damit zeigt es sich, dass die Interpolation divergent wird, sowohl auf der Linie des Argumentes als auf den Schräglinien, die nach den abnehmenden Argumenten zeigen; dagegen erhält man für die Schräglinien der zunehmenden Richtung die für $a>1$ konvergente Reihe

$$f(x) = \frac{a^x - 1}{a-1}\Big(1 - \frac{(a^{x-1}-1)(a-1)}{a^2-1}\Big(1 - \ldots - \frac{(a^{x-n}-1)(a^n-1)}{a^{n+1}-1}\Big(1 - \ldots,$$

dass diese Funktion nicht $= x$ ist, sieht man aus

$$f(x) - f(x-1) = 1 - (1-a^{x-1})(1-a^{x-2})(1-a^{x-3})\ldots.$$

Nichtdestoweniger giebt solche Interpolation in den üblichen Tafeln gute Resultate. Da ist a von 1 so wenig verschieden, dass der Fehler unmerklich wird.

Beispiel 6. Ist die Bestimmung der positiven Quadratwurzel bei indirekter Interpolation in einer Tafel der ganzen reellen Quadratzahlen zulässig?

Die dividirte Differenz ist

$$\delta(a^2, \ldots, (a+n)^2) = (-1)^{n-1}\frac{(2a)!}{(2(a+n)-1)!}\cdot\frac{(2n-3)!}{n!\,(n-2)!}\cdot 2.$$

Da nur positive Argumente vorliegen, ist nur von Interpolation auf einseitigen Schräglinien die Rede. Ist a^2 das Anfangsargument der Schräglinie, wird das Resultat

$$f(x^2, a) = a + \frac{x^2-a^2}{2a+1}\Big(1 - \frac{x^2-(a+1)^2}{(2a+2)(2a+3)}\Big\{1 - \ldots - \frac{x^2-(a+n)^2}{(a+n)(2a+2n+1)}\cdot\frac{2n-1}{n+1}\Big\{1 - \ldots$$

welches, mit Grenz-Quote $= 1$ und Grenz-Charakter $= 2$ für jeden Wert von x konvergent ist. Das Resultat ist doch nach den verschiedenen Werten von a wesentlich verschieden. Dass die Reihe, selbst wenn $a = 0$ ist, und die Tafel also im vollen Umfange benutzt wird, nicht der positiven Quadratwurzel exakt entspricht, sieht man daraus, dass $f(\frac{1}{4}, 0) = \frac{1}{\pi}$ und nicht $= \frac{1}{2}$ ist; man bekommt nämlich hier den Ausdruck Wallis's für π. Noch leichter beweist man, dass $f(0, 1) = \frac{1}{2}$ statt $= 0$ ist.

§ 16.

Die Frage von Konvergenz oder Divergenz ist nicht die einzige, die man bei einer kritischen Prüfung einer Interpolation berücksichtigen muss.

Wenn man eine Tafel zur Interpolation darbietet, beabsichtigt man immer, dass sie eine bestimmte Funktion vertrete. Aber Fälle wie die Beispiele 5 und 6 des vorigen § müssen uns an die Tatsache erinnern, dass mehrere Funktionen sogar unendlich viele übereinstimmende Werte haben können und mit einer vorgelegten Tafel vollständig stimmen und dennoch übrigens ganz verschieden sein können.

Die Formel Newtons ist eindeutig, und insofern sie mit endlichem oder konvergentem Resultat angewandt werden kann, giebt ihre Anwendung auf eine vorgelegte Tafel nur eine einzige Funktion, nämlich die vom niedrigsten Grade für

eine endliche Tafel, die möglichst einfache — dies kann man mit Grund behaupten — auch wenn die Tafel unendlich viele Angaben umfasst.

Die Frage, ob diese interpolirte Funktion die beabsichtigte ist, kann man im Allgemeinen nicht durch ihre Übereinstimmung für alle Argumente der Tafel entscheiden. Während selbst eine einzelne nachgewiesene Abweichung für ein neues Argument die Identität der Funktionen widerlegt, kann der Nachweis von Übereinstimmung für beliebig viele neue Argumente keinen positiven Beweis abgeben; der Umfang der Tafel wird nur dadurch vergrössert, ihre Begrenzung aber wird nicht aufgehoben.

Eine Entscheidung im positiven Sinne ist nur möglich, wenn man von der beabsichtigten Funktion ferner weiss oder voraussetzen darf, dass sie Eigenschaften hat, die der Interpolation günstig sind. Glücklicherweise darf man aber behaupten, dass so gut wie alle diejenigen Funktionen, die entweder die Natur oder die bedeutsamere mathematische Technik darbieten, einer Klasse angehören, die nach der Formel Newtons interpolirt und mit endlichem oder konvergentem Resultat differentiirt werden kann, wenigstens innerhalb engerer oder weiterer Begrenzung des Argumentes.

Ist es gegeben, dass die beabsichtigte Funktion für jedes Argument dieser Klasse angehört, dann ist die Beantwortung der Frage nicht mehr von der Beschaffenheit der Funktion, sondern nur von der Verteilung der Argumente abhängig. Es gilt dann aber der Satz, dass *die Tafelfunktion überall mit der beabsichtigten Funktion stimmen muss, wenn für unendlich viele Argumente innerhalb einer endlichen Begrenzung exakte Übereinstimmung stattfindet.*

Gehören nämlich zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ beide der genannten Klasse an, muss dasselbe von ihrer Differenz gelten. Und stimmen dann $f(x)$ und $g(x)$ für alle Argumente $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_\infty$ überein, ohne völlig zusammenzufallen, muss man dies für ein Argument ω dadurch konstatiren können, dass

$$F(\omega) = f(\omega) - g(\omega)$$

einen endlichen Wert bekommt, während für jeden Index n von 1 bis ∞,

$$F(a_n) = f(a_n) - g(a_n) = 0.$$

Den Wert für $F(\omega)$ können wir zur Einheit nehmen, ohne die Gemeingültigkeit zu verringern. Und Interpolation von $F(x)$ nach den durchgehend identischen Formeln von Lagrange und Newton giebt uns

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \frac{x-a_1}{\omega-a_1}\cdot\frac{x-a_2}{\omega-a_2}\cdots\frac{x-a_n}{\omega-a_n}\cdots\frac{x-a_\infty}{\omega-a_\infty} \\ \text{und} \\ F(x) &= 1+\frac{x-\omega}{\omega-a_1}\cdot\left(1+\frac{x-a_1}{\omega-a_2}\left(1+\ldots+\frac{x-a_{n-1}}{\omega-a_n}\left(1+\ldots+\frac{x-a_\infty}{\omega-a_\infty}\right)\right)\right), \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

deren Konvergenzbedingungen entscheiden müssen, ob $f(x)$ und $g(x)$ von einander verschieden sein können. In (45) ist die Grenz-Quote $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{\omega-a_n}{x-a_{n-1}}\right)=\frac{\omega-a_\infty}{x-a_\infty}$.

In diesen Fällen ist aber die Summe s_n der ersten n Glieder von dem n^{ten} allgemeinen Gliede u_n mittelst

$$s_n = u_n \frac{x-a_{n-1}}{x-\omega}$$

abhängig. Soll die Interpolation konvergiren, führt die notwendige Bedingung $u_\infty = 0$ auch $s_\infty = 0$ im Allgemeinen mit sich.

Das heisst, die Funktion $F(x) = f(x) - g(x)$ kann von 0 nicht abweichen.

Nach der Form der Grenz-Quote ist die Konvergenz gesichert, wenn nur x näher als ω bei a_∞ gelegen ist. Ein Unterschied zwischen $g(x)$ und $f(x)$ bei einem von a_∞ entfernten Argumente ω, kann so nur bei dazwischen kommender Divergenz Statt finden. Dieser Satz gilt, wenn alle Argumente a_n der Tafel und auch a_∞ endliche Werte haben.

Nur wenn $a_\infty = \infty$ ist, führt $u_\infty = 0$ nicht mit Notwendigkeit auf die Konsequenz $s_\infty = 0$. Dann lässt auch die Grenz-Quote

$$\frac{\omega-a_\infty}{x-a_\infty} = 1$$

die Frage von Konvergenz unentschieden, und der Charakter der Reihe,

$$n\left(\frac{x-\omega}{a_n-\omega}+\frac{a_n-a_{n-1}}{a_n-\omega}\right),$$

deutet durch sein zweites Glied eine Tendenz für positives Vorzeichen an, welche, wenn auch nur durch spezielle Berücksichtigung des Grenzwertes von $a_n - a_{n-1}$, die Konvergenz mit von 0 verschiedenen Werten als überwiegende Regel hervortreten lässt.

Diese Fälle sind solche, in welchen die unendliche Anzahl von Argumenten nur dadurch erreicht wird, dass unendlich grosse Argumente zuletzt in der Interpolation angewandt werden.

Das Resultat solcher Interpolationen wie auch von den endlichen Interpolationen, ist nur das einfachste unter einer Mannigfaltigkeit von möglichen Resultaten, und ob es die beabsichtigte Funktion wiedergiebt, ist eine offene Frage, die in besonderer Weise untersucht werden muss, namentlich dadurch, dass ein Tafelintervall mit einer Unendlichkeit von neuen Werten ausgefüllt wird, die unter unseren zuerst genannten Fall fallen.

Konvergirt $F(x)$ gegen einen andern Wert als 0, kann das allgemeine Interpolationsresultat ausser $f(x)$ nicht nur eine bestimmte, davon verschiedene Funktion sein, sondern alles, was unter die konvergenten Fälle von

$$g(x) = f(x) + F(x) \cdot \varphi(x) \tag{45 a}$$

eingeht, wo $\varphi(x)$ eine willkürliche für endliche Argumente endliche Funktion ist.

Beispiel. Zeige, dass die Funktion $\frac{1}{1+x}$ eindeutig bestimmt ist innerhalb der Grenzen $x = \pm 1$ mittelst Interpolation in einer Tafel, in der den Argumenten $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{\infty}$ die Funktionswerte $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, 1$ beziehungsweise entsprechen.

Andert sich das Resultat durch das Ausschieben einer endlichen Anzahl der ersten Positionen in dieser Tafel?

Unter den nicht ganz sicheren Tafelformen findet sich die wichtigste von allen, wo die Argumente der Tafel äquidistant sind und von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen können. Die Form der unbestimmbaren komplementären Funktion, die nach jeder Interpolation in einer solchen Tafel zu der gefundenen «einfachsten» zu addiren sein kann, um die beabsichtigte Funktion zu finden, kann am leichtesten hervorgezogen werden, wenn wir uns die Argumente der Tafel durch die ungeraden Zahlen vertreten denken, und den komplementären Funktionswert für jedes von diesen $=0$ setzen, während das Komplement $=1$ für das Argument 0 gesetzt wird. Die Formel von Lagrange giebt uns dann

$$F(x) = \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2}\right)\ldots \tag{46}$$

während die Formel Newtons die damit identische Reihe

$$F(x) = 1 - \frac{x^2}{1}\left(1 - \frac{x^2-1}{9}\left(1 - \frac{x^2-9}{25}\left(1 - \ldots - \frac{x^2-(2n-1)^2}{(2n+1)^2}\left(1 - \ldots\right.\right.\right.\right. \tag{46 a}$$

giebt, welche beide, weil die Grenz-Quote $=1$ und der Grenz-Charakter $=2$, für jeden reellen Wert von x konvergent sind.

Dass $F(x)$ eine periodische Funktion ist und zwar dieselbe, welche wir in § 15, Beispiel 3, ohne Beweis als $\cos\frac{\pi x}{2}$ bezeichnet haben, zeigen wir am leichtesten, wenn wir aus (46) die Werte für $x = 4n+2$ und für $4n$ suchen, welche als -1 und $+1$ bestimmt werden, weil sie dieselben Faktoren in den Zählern und den Nennern bekommen, nur muss man die Differenzen von Quadratzahlen in Produkte umschreiben.

Es giebt also nach jeder Interpolation in einer solchen äquidistanten Tafel eine Möglichkeit, dass das Resultat, wie konvergent es auch sein möge, nicht das beabsichtigte ist, und dass dies nur gefunden werden kann durch die Addition einer komplementären Funktion der Form $\cos\frac{\pi x}{2} \cdot \varphi(x)$. Bei der Entscheidung von Fragen, inwiefern derartige Glieder dem Interpolationsresultat hinzuzufügen sind, um die beabsichtigte Funktion zu geben, müssen interpolirte Werte für neue Argumente in den Intervallen mit entsprechenden Werten der beabsichtigten Funk-

tion verglichen werden. Durch jedes neue Argument, wofür man Übereinstimmung findet, wird die Möglichkeit von Korrektionsgliedern beschränkt. Aber erst, wenn man in einem endlichen Intervalle unendlich viele mit dem beabsichtigten Wert übereinstimmende Funktionswerte kennt, ist die Richtigkeit der Interpolation bewiesen. Findet man, dass die beabsichtigte Funktion für die Argumente $a, \ldots, d$ Werte hat, die mit der äquidistanten Interpolation nicht stimmen, sondern die Korrektionen $A, \ldots, \varDelta$ fordern, kann man durch Interpolation nach der Formel von Lagrange oder der von Newton die Funktion $\varphi(x)$ erlangen, indem $\varphi(x)$ für diese Argumente die Werte $\varphi(a) = \dfrac{A}{\cos\frac{\pi a}{2}}, \ldots, \varphi(d) = \dfrac{\varDelta}{\cos\frac{\pi d}{2}}$ haben muss. Soll das Korrektionsglied periodisch sein, kann die im § 38 angegebene Metode, um das Rechnen mit Argumenten und Werten der sämtlichen Perioden zu vermeiden, angewandt werden. Hierbei und bei aller Interpolation periodischer Funktionen wird es eine Hauptsache sein, dass die Periodenlängen richtig bestimmt werden. Soll dieses mittelst einer äquidistanten Tafel ausgeführt werden, darf es nicht übersehen werden, dass eine solche Bestimmung nicht eindeutig sein kann. In jedem Intervalle kann die Funktion sehr viele Perioden durchlaufen haben. Genügt eine Periodenlänge P der ganzen Tafel, kann der Winkel, der einem Intervall entspricht, zwar $\frac{2\pi}{P}$ sein, kann aber auch jedes Multiplum von 2π grösser oder kleiner sein, und da nur der numerische Wert von P Bedeutung hat, wird man den allgemeinen Ausdruck der gesuchten Periodenlänge P' aus

$$\frac{1}{P'} = n \pm \frac{1}{P}$$

finden. Hieraus sieht man, dass nur zwei der in jedem Falle möglichen Periodenlängen grösser als 1 Intervall der Tafel sein können, nur eine grösser als 2 Intervalle. Ist die Interpolation einer reinen periodischen Funktion bei äquidistanter Tafel schwierig oder unmöglich, kann man sich helfen, indem man nur jeden n^{ten} Tafelwert für die Interpolation anwendet, nämlich diejenigen, die sich langsam verändern und einer Funktion mit langer Periode angehören könnten.

Wird die Interpolation unserer äquidistanten Tafel einseitig — entweder aufwärts oder abwärts — geführt, ergeben sich die beiden Korrektions-Funktionen

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(1 \pm \frac{x}{1}\right)\left(1 \pm \frac{x}{3}\right) \cdots \left(1 \pm \frac{x}{2n-1}\right) \cdots, \\ &= 1 \pm \frac{x}{1}\left(1 + \frac{1 \pm x}{3}\left(1 + \ldots + \frac{2n-3 \pm x}{2n-1}\left(1 + \ldots\right.\right.\right. \end{aligned}$$

die je nach ihrer Seite von $x = 0$, auf $F(x) = 0$ konstanter Weise konvergiren, nach der anderen Seite aber auf $F(x) = \infty$ divergiren. Die Grenz-Quote ist $= 1$,

und der Grenz-Charakter $1 \mp \frac{x}{2}$. Im Vergleich mit (45 a) ergiebt sich ein scheinbarer Widerspruch, der dadurch gehoben wird, dass (45 a) die Form

$$g(x) = f(x) + F(x) \cdot F(-x) \cdot \varphi(x)$$

gegeben werden muss. Die Unbestimmtheit $F(x) \cdot F(-x) = 0 \cdot \infty$, wird gehoben, wenn bei der Multiplikation der unendlich vielen Faktoren, jeder Faktor mit dem entsprechenden multiplizirt wird.

§ 17.

Was wir in den vorhergehenden §§ über Konvergenz einer unendlichen Reihe und über ihre Uebereinstimmung mit dem beabsichtigten Werte gesagt haben, findet seine hauptsächlichste Anwendung bei der Exponential-Funktion.

Hier begegnet uns wieder ein Fall, in welchem die Interpolationsrechnung als die Vermittlerin zwischen der elementaren und der höheren Matematik auftritt.

Die elementare Matematik gelangt mit vollem Recht bis an den allgemeinen Potenz-Begriff, — vorausgesetzt, dass der Exponent eine ganze Zahl bedeutet; und noch weiter giebt sie uns den allgemeinen Begriff von Wurzeln, — unter derselben Voraussetzung, dass der Wurzelexponent eine ganze Zahl sein muss. Ausserdem darf sie noch auf die inkomplete oder analogische Gleichheit zwischen $\sqrt[q]{a^p}$ und $a^{\frac{p}{q}}$ hindeuten, aber nur als auf ein ihr unzugängliches Problem.

Geht die elementare Matematik weiter, vergisst sie, dass die gebrochenen Exponenten keine Zahlen, nur zahlenähnliche Symbole sein können, dann muss sie konsequenter Weise für die Exponential- und Logarithmen-Funktionen dieselbe Auffassung geltend machen, die d'Alembert gegen Euler in dem bekannten Streit wegen der Logarithmen der negativen Zahlen verteidigte. Nach dieser Auffassung sollte jede Exponentialfunktion eine willkürliche Wurzel der Einheit als obligater Faktor enthalten.

Diese Auffassung habe ich in meiner Jugend und zwar etwas unvorsichtiger Weise zu verteidigen versucht; sonst ist sie von allen Matematikern aufgegeben.

Um nicht in solches Chaos von Unbestimmtheit zu geraten, ist es jedenfalls notwendig, einen eindeutigen Zweig der Funktion heraus zu greifen. Und es empfiehlt sich, wie Euler es tat, nur diesen Zweig Exponential-Funktion zu nennen.

Die Darstellung der eindeutigen Exponentialfunktion ist aber eine Aufgabe der Interpolationsrechnung, und wurde als solche von Newton mit seiner allgemeinen Binomialformel gelöst. Weil diese Aufgabe für den folgenden Teil der Interpolationsrechnung überaus wichtig ist, darf eine recht vollständige Lösung hier nicht fehlen.

In der Tafel der Potenz-Funktion für die Grundzahl a entsprechen den Argumenten (Exponenten) 0, 1, ..., n die Funktionswerte 1, a, ..., a^n. Die Differenzen auf der absteigenden Schräglinie des Argumentes 0 sind dann die Potenzen $(a-1)^r$, wo r die Ordnung der Differenzen ist. Und das Interpolationsresultat ist die Binomialformel Newtons

$$a^x = 1+\frac{x}{1}(a-1)\Big(1+\frac{x-1}{2}(a-1)\Big(1+\ldots+\frac{x-n+1}{n}(a-1)\Big(1+\ldots \qquad (47\,\mathrm{a})$$

Die Grenz-Quote ist $q_\infty = \frac{1}{1-a}$, der Grenz-Charakter $q'_\infty = 1+x$. In erster Linie hängt die Konvergenz nur von der Grundzahl a, nicht von den Exponenten x ab. Für positive Grundzahlen zwischen 0 und 2 ist die Reihe konvergent. In divergenten Fällen entscheidet das positive Vorzeichen des reellen Teiles von $x+1$ für Halb-Konvergenz im weitesten Sinne.

In einer Tafel, die für die Argumente $-n$, ..., -1, 0 die Werte $\frac{1}{a^n}$, ..., $\frac{1}{a}$, 1 oder a^{-n}, ..., a^{-1}, 1 hat, sind die Differenzen auf aufsteigender Schräglinie des Argumentes 0 dagegen $\left(1-\frac{1}{a}\right)^r$, und interpolirt man nach dieser Schräglinie, erhält man

$$a^x = 1+\frac{x}{1}\Big(1-\frac{1}{a}\Big)\Big(1+\frac{x+1}{2}\Big(1-\frac{1}{a}\Big)\Big(1+\ldots+\frac{x+n-1}{n}\Big(1-\frac{1}{a}\Big)\Big(1+\ldots \qquad (47\,\mathrm{b})$$

welches sich nur dadurch von (47 a) unterscheidet, dass $-x$ für x und $\frac{1}{a}$ für a gesetzt ist: Die Konvergenz erstreckt sich hier über die positiven Grundzahlen zwischen $\frac{1}{2}$ und ∞, und zwar auch hier für beliebige Exponenten x.

Bemerkt man, dass die Differenzen der Tafel von jeder Ordnung hier mit den Funktionswerten selbst proportional sind, sieht man, dass in einer Tafel mit durchgehends äquidistanten, negativen sowohl als positiven, ganzen Argumenten die Differenzen von gerader Ordnung auf der Zeile mit dem Argumente 0

$$\Delta^{2r}(0) = \frac{(a-1)^{2r}}{a^r} = \left(a-2+\frac{1}{a}\right)^r$$

sind, während diejenigen der ungeraden Ordnung zwischen den Argumenten 0 und 1

$$\Delta^{2r+1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{(a-1)^{2r+1}}{a^r}$$

sind.

Um die ganze äquidistante Tafel von $n=-\infty$ bis $n=+\infty$ anzuwenden, muss man nach einer Zig-Zaglinie interpoliren. Wenn man die Richtung der Interpolation immer zwischen abwärts und aufwärts wechseln lässt, erhält man die Resultate als Summen zweier Reihen ausgedrückt:

$$a^x = 1+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\frac{(x+1)(x-2)}{3\cdot 4}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots+\frac{(x+n-1)(x-n)}{(2n-1)2n}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots\right.\right.\right.$$
$$+x(a-1)\left(1+\frac{x^2-1}{2\cdot 3}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\frac{x^2-4}{4\cdot 5}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots+\frac{x^2-n^2}{2n(2n+1)}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots\right.\right.\right.\right. \quad (48\,\text{a})$$

oder

$$a^x = 1+\frac{x(x+1)}{1\cdot 2}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\frac{(x-1)(x+2)}{3\cdot 4}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots+\frac{(x-n+1)(x+n)}{(2n-1)2n}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots\right.\right.\right.$$
$$+x\frac{a-1}{a}\left(1+\frac{x^2-1}{2\cdot 3}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\frac{x^2-4}{4\cdot 5}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots+\frac{x^2-n^2}{2n(2n+1)}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots\right.\right.\right.\right. \quad (48\,\text{b})$$

Die Grenz-Quoten dieser Reihen sind alle $q_\infty = \frac{-4a}{(a-1)^2}$ und die Grenz-Charaktere alle $q'_\infty = \frac{1}{2}$, also von x unabhängig.

Leitet man aus diesen Reihen, wie in § 13, solche Reihen ab, in welchen die geraden von den ungeraden Potenzen von x oder von $z = x - \frac{1}{2}$ getrennt sind, findet man

$$a^x = 1+\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\frac{x^2-1}{3\cdot 4}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots+\frac{x^2-(n-1)^2}{(2n-1)2n}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots+\right.\right.\right.$$
$$+x\frac{a^2-1}{2a}\left(1+\frac{x^2-1}{2\cdot 3}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\frac{x^2-4}{4\cdot 5}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots+\frac{x^2-n^2}{2n(2n+1)}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots\right.\right.\right.\right. \quad (49\,\text{a})$$

$$a^{z+\frac{1}{2}} = \frac{a+1}{2}\left(1+\frac{4z^2-1}{2\cdot 4}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\frac{4z^2-9}{6\cdot 8}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots+\frac{4z^2-(2n-1)^2}{(4n-2)4n}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots\right.\right.\right.\right.$$
$$+z(a-1)\left(1+\frac{4z^2-1}{4\cdot 6}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\frac{4z^2-9}{8\cdot 10}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots+\frac{4z^2-(2n-1)^2}{4n(4n+2)}\frac{(a-1)^2}{a}\left(1+\ldots\right.\right.\right.\right. \quad (49\,\text{b})$$

Auch hier sind die Grenz-Quoten aller Reihen unverändert $q_\infty = \frac{-4a}{(a-1)^2}$, dagegen ergiebt sich eine Verbesserung der Grenz-Charaktere in der ersten Reihe (49 a) und in der zweiten (49 b), indem hier $q'_\infty = \frac{3}{2}$ ist anstatt $\frac{1}{2}$. In dem einzigen Falle, wo der Grenz-Charakter hier über Konvergenz entscheiden kann, indem für $a = -1$ die Grenz-Quote $= 1$ ist, entstehen Summen, deren eines Glied konvergent ist, während das andere zwar divergent ist, aber durch den Faktor $(1-1)$ als unbestimmt betrachtet werden muss.

Für reelle Grundzahlen sind (48) und (49) konvergent, wenn

$$3-8^{\frac{1}{2}} < a < 3+8^{\frac{1}{2}}$$

oder annähernd, wenn

$$\frac{6}{35} < a < \frac{35}{6}.$$

Für komplexe Grundzahlen a kann man, indem man sie als Orts-Bestimmungen von Punkten einer Ebene auffasst, die verschiedenen Grenzlinien zwischen Konvergenz und Divergenz dieser Reihen bestimmen.

Die für komplexe Zahlen eigentümliche Abhängigkeit durch Umtausch des Vorzeichens von $\sqrt{-1}$ bezeichnen wir in der Weise, dass wenn $a = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}\sqrt{-1}$ und $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ reelle Zahlen sind, schreiben wir $\bar{a} = \mathfrak{r} - \mathfrak{s}\sqrt{-1}$. Dadurch wird

$a + \bar{a}$	immer	reel,
$a - \bar{a}$	»	rein imaginär,
$a\bar{a} = \lvert a \rvert^2$	»	positiv und zwar dem Quadrate des Modulus $\lvert a \rvert$ gleich
und $\frac{a}{\bar{a}}$	»	eine Wurzel der Einheit.

Die allgemeine Hauptbedingung der Grenz-Linie, dass die Grenz-Quote eine Wurzel der Einheit sein muss, giebt uns die Gleichung $q_\infty \cdot \bar{q}_\infty = 1$.

Für die Binomreihe (47 a) ist die Gleichung der Grenz-Linie

$$\frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\bar{a}} = 1,$$

diese entspricht dem Kreise,

$$(a-1)(\bar{a}-1) = 1,$$

die mit dem Radius 1 um das Centrum im Punkte, $a = 1$, beschrieben ist.

Für (47 b) giebt die Grenz-Quote $q_\infty = \frac{a}{a-1}$ uns die Gleichung

$$a + \bar{a} = 1,$$

die Grenz-Linie ist eine gerade durch den Punkt $a = \frac{1}{2}$ gehende Linie, senkrecht zur Linie der reellen Zahlen.

Für alle die Reihen (48) und (49) ist die Grenz-Quote

$$q_\infty = \frac{-4a}{(1-a)^2}.$$

Die Gleichung der Grenz-Linie

$$(1-a)^2(1-\bar{a})^2 = 16a\bar{a}$$

kann in ein Produkt der 4 Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sqrt{a\bar{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{\bar{a}} - 1 &= 0 \\
\sqrt{a\bar{a}} + \sqrt{a} + \sqrt{\bar{a}} - 1 &= 0 \\
\sqrt{a\bar{a}} - \sqrt{a} + \sqrt{\bar{a}} + 1 &= 0 \\
\sqrt{a\bar{a}} + \sqrt{a} - \sqrt{\bar{a}} + 1 &= 0
\end{aligned}$$

aufgelöst werden, von welchen die beiden letzteren keine Lösungen gestatten. Die beiden ersteren legen jede ihre Wurzel von $\sqrt{a}$ an den Kreis mit Radius $= \sqrt{2}$, der um $a = 1$ als Centrum beschrieben ist. Durch Quadriren dieses Kreises ergiebt sich die Grenz-Linie für a als eine Konkoide mit Doppel-Punkt in $a = -1$. Von der positiven Achse zwischen $3 \pm 8^{\frac{1}{2}}$ krümmt sich das komplexe Gebiet der Kon-

vergenz mit zwei symmetrischen breiten Zungen, bis die Zungenspitzen sich an der Linie der negativen a und zwar in $a = -1$ begegnen.

Andere der Konkoide mehr oder weniger ähnliche Gebiete der Konvergenz entsprechen den anderen möglichen Interpolationen nach Zig-Zag-Linien. Alle umschliessen das gemeinsame Konvergenz-Gebiet des Kreissektors durch die Punkte

$$a = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad a = 1+\sqrt{-1}, \quad a = \frac{3+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{und} \quad a = 2.$$

Jedes Konvergenz-Gebiet erstreckt sich von da aus mit zwei symmetrischen Zungen nach einem Doppelpunkt an der geraden Linie der negativen Grundzahlen a. Für diese bleiben die Interpolationen alle divergent. Für jede komplexe oder positive Grundzahl lassen sich aber konvergente Zig-Zag-Interpolationen angeben.

Bei der allgemeinen regulären Zig-Zag-Interpolation wendet man nach b Differenzen der aufsteigenden Schräglinie immer c Differenzen der absteigenden Schräglinie an, dann wieder b auf- und c abwärtsgehende Differenzen, u. s. w. Jede solche Interpolationsformel löst sich in einer Summe von $b+c$ unendlichen Reihen auf, für welche

$$q_\infty = \left(\frac{b+c}{b}\right)^b \left(\frac{b+c}{c}\right)^c \left(\frac{a}{a-1}\right)^b \left(\frac{-1}{a-1}\right)^c, \tag{50}$$

während $q'_\infty = \frac{1}{2}$ ist.

Wenn die Grundzahl a der zu interpolirenden Potenz-Funktion,

$$a = -\frac{b}{c},$$

und also negativ ist, ergiebt sich die Grenz-Quote $q_\infty = 1$ und die Reihen divergiren. Wenn aber sonst der Modulus der Grundzahl

$$|a| = \frac{b}{c},$$

dann ist die Interpolation überall konvergent und zwar mit maximaler Grenz-Quote. Durch Differentiation des Ausdruckes für $q_\infty \cdot \bar{q}_\infty$ mit Rücksicht auf $\frac{b}{c}$ lässt sich dieser Satz leichter beweisen als man nach dem komplizirten Ausdruck für q_∞ als Funktion von a, b und c erwarten sollte.

Wenn wir das Gesagte zusammenfassen, ergiebt sich, dass bei Interpolation der elementaren Potenz-Funktionen mit ganzen und reellen Exponenten nur die Fälle durch Divergenz unbestimmt ausfallen, in welchen die Grundzahl rein negativ ist.

Für positive oder komplexe Grundzahlen erhält man immer konvergentes Resultat, wenn man die Zig-Zag-Bewegung der Interpolation nicht allzu unzweckmässig wählt. Die Konvergenz ist vom Werte des Exponenten im Allgemeinen unabhängig; die einzige Ausnahme bezieht sich auf die Fälle, in welchen tatsächlich nur die eine Hälfte der Tafel zur Interpolation benutzt wird.

§ 18.

Man kann jetzt beweisen, dass jede der Interpolationsreihen (47), (48), (49) für die Exponentialfunktion ohne irgend welches Korrektionsglied der Funktionsgleichung der Exponentialfunktion genügt, wonach $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ für jedes x und y. Ebenfalls ohne Korrektionsglied wird auch $a^{\frac{1}{r}}$ der positive Wert für die r^{te} Wurzel $\sqrt[r]{a}$ sein.

Dieser Beweis setzt voraus, dass man den Binomial-Satz für Faktoriellen mit positivem, ganzem Exponenten kennt. Wie für den völlig analogen Binomial-Satz von Potenzen gründet sich der Beweis darauf, dass jeder Binomial-Koeffizient die Summe der beiden konsekutiven Binomial-Koeffizienten von nächst niedrigerer Ordnung ist, und dies ist ganz elementar.

Als Faktoriellen bezeichnet man

$$\begin{aligned}
x(x+k) &= x^{2|k} \\
x(x+k)(x+2k) &= x^{3|k} \\
\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\dots \\
x(x+k)\dots(x+(r-1)k) &= x^{r|k}.
\end{aligned}$$

Für $k = 0$ ist also die Faktorielle Potenz.

Der Binomialsatz ist jetzt

$$(x+y)^{r|k} = x^{r|k} + \frac{r}{1} x^{(r-1)|k} y + \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} x^{(r-2)|k} y^{2|k} + \dots + y^{r|k},$$

dessen Richtigkeit man erprobt, indem man diese Gleichung mit $(x+y+rk)$ multiplizirt, welches man bei jedem Glied in verschiedener Weise nach

$$x + y + rk = (x + sk) + (y + (r-s)k)$$

spaltet, indem $s = 0, 1, \dots, r$.

Schreibt man nun (47 a) mit Faktoriellen, wird

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}(a-1) + \frac{x^{2|-1}}{2!}(a-1)^2 + \frac{x^{3|-1}}{3!}(a-1)^3 + \dots + \frac{x^{n|-1}}{n!}(a-1)^n + \dots$$

$$a^y = 1 + \frac{y}{1}(a-1) + \frac{y^{2|-1}}{2!}(a-1)^2 + \frac{y^{3|-1}}{3!}(a-1)^3 + \dots + \frac{y^{n|-1}}{n!}(a-1)^n + \dots$$

Multiplizirt man diese und ordnet das Produkt nach Potenzen von $(a-1)$, erhält man

$$a^x \cdot a^y = 1 + \frac{x+y}{1}(a-1) + \frac{(x+y)^{2|-1}}{2}(a-1)^2 + \dots + \frac{(x+y)^{n|-1}}{n!}(a-1)^n + \dots =$$
$$= a^{x+y}.$$

Wenn also die Interpolationsreihe (47 a) der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion genügt, ist sie ohne irgend welches Korrektionsglied die beabsichtigte

Funktion selbst. Man kann auch leicht konstatiren, dass für reelles r $a^{\frac{1}{r}}$ ein Wert von $\sqrt[r]{a}$, und besonders für positives a der positive Wurzelwert ist. Hiernach muss die Korrektion für alle rationalen Argumente (Exponenten) $= 0$ sein, also unendlich häufig nicht nur in einem, sondern in allen Argumentintervallen von endlichem Umfange.

In völlig analoger Weise wie für (47 a) beweist man für (47 b) dasselbe.

Für (48) und (49) und die anderen Zig-Zag-Interpolationen ist solcher direkter Beweis der Funktionalgleichung schwieriger und im Allgemeinen unausführbar.

Für (49 b) können wir jedoch leicht beweisen, dass diese Reihe ohne Korrektion die positive Quadratwurzel einer positiven Grundzahl a ergiebt. Wir setzen da $z = 0$ und erhalten

$$a^{\frac{1}{2}} = \frac{a+1}{2}\left[1 - 2\frac{(a-1)^2}{16a} + 6\frac{(a-1)^4}{(16a)^2} - 20\frac{(a-1)^6}{(16a)^3} + \ldots + (-1)^n v_n \frac{(a-1)^{2n}}{(16a)^n} + \ldots, \right. \tag{51}$$

wo $v_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$ der maximale Binomialquotient des $2n^{\text{ten}}$ Grades ist.

Durch Quadriren erhält man in der Tat:

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{(a-1)^2}{4a} + \frac{(a-1)^4}{16a^2} - \ldots\right) = \frac{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2}{1 + \frac{(a-1)^2}{4a}} = a.$$

Die Richtigkeit dieses Resultats ergiebt sich durch den Satz, dass

$$v_0 v_n + v_1 v_{n-1} + \ldots + v_r v_{n-r} + \ldots + v_n v_0 = 4^n.$$

Es ist aber $v_r = v_{r-1}\left(4 - \frac{2}{r}\right)$ und folglich

$$\frac{r}{r+s} v_r v_s + \frac{s+1}{r+s} v_{r-1} v_{s+1} = 4 v_{r-1} v_s.$$

Setzen wir der Reihe nach $r = n, n-1, \ldots, 1$ und immer $s = n-r$, ergiebt sich

$$v_0 v_n + v_1 v_{n-1} + \ldots + v_n v_0 = 4(v_0 v_{n-1} + v_1 v_{n-2} + \ldots + v_{n-1} v_0) = 4^n.$$

Alle unsere Reihen (47), (48) und (49) der interpolirten Potenzfunktion genügen aber nicht nur der gemeinsamen Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, sondern sie sind auch unter einander identisch, wenigstens insofern sie konvergent bleiben.

Unsere Reihen unterscheiden sich in der Weise, dass von einem beliebigen Anfangsgliede an die Glieder ganze Potenzen von $\frac{1}{a}$ oder a als Faktoren aufnehmen sollen.

$$\frac{1}{a} = 1 - \frac{a-1}{a} \quad \text{und} \quad a = 1 + (a-1).$$

Die Potenzen dieser Zahlen kennen wir nach (41, 1 und 2) als Restglied-Reihen, und setzen wir diese in (47 a oder b) ein, erhalten wir doppelt unendliche Reihen, durch deren Summirung die Transformation sich ergiebt, wie folgende Rechnung zeigt:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}(a-1)\left\{1 + \frac{x-1}{2}(a-1) + \frac{x-1}{2}\frac{x-2}{3}(a-1)^2 + \frac{x-1}{2}\frac{x-2}{3}\frac{x-3}{4}(a-1)^3 + \dots\right\} =$$

$$= 1 + \frac{x}{1}\frac{a-1}{a}\left\{\begin{array}{l} \left(1 + \frac{a-1}{2} + \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \dots = a\right) + \\ \quad + \frac{x-1}{2}\frac{a-1}{a}\left(1 + 2\frac{a-1}{a} + 3\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \dots = a^2\right) + \\ \quad + \frac{x-1}{2}\frac{x-2}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2\left(1 + 3\frac{a-1}{a} + \dots = a^3\right) + \\ \quad + \frac{x-1}{2}\frac{x-2}{3}\frac{x-3}{4}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3(1 + \dots = a^4) + \dots \end{array}\right\} =$$

$$= 1 + \frac{x}{1}\frac{a-1}{a}\left(1 + \frac{x+1}{2}\frac{a-1}{a}\left(1 + \frac{x+2}{3}\frac{a-1}{a}\left\{1 + \frac{x+3}{4}\frac{a-1}{a} + \dots\right\} =\right.\right.$$

$$= 1 + \frac{x}{1}\frac{a-1}{a}\left(1 + \frac{x+1}{2}\frac{a-1}{a}\left(1 + \frac{x+2}{3}(a-1)\left\{\begin{array}{l} \left(1 - (a-1) + \dots = \frac{1}{a}\right) + \\ \frac{x+3}{4}(a-1)\left(1 - \dots = \frac{1}{a^2}\right) + \dots \end{array}\right\} =\right.\right.$$

$$= 1 + \frac{x}{1}\frac{a-1}{a}\left(1 + \frac{x+1}{2}\frac{a-1}{a}\left(1 + \frac{x+2}{3}(a-1)\left(1 + \frac{x-1}{4}\frac{a-1}{a}(1 + \dots)\right)\right)\right).$$

Bei diesen Summirungen ist zu beachten, dass die numerisch gegebenen Binomialkoeffizienten überall in Summen zweier Binomialkoeffizienten nächst niedriger Ordnung aufzulösen sind.

Durch solches Hin- und Her-Transformiren kann man jede Zig-Zag-Bewegung der Interpolationsreihe auf den Fersen folgen.

Die Grundzahl a geht in die Interpolationsformeln (47), (48), (49) als ein Parameter (oder eine zweite unabhängige Variable) der erweiterten Potenzfunktion ein. Da es sich aber gezeigt hat, dass diese der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion mit einer eindeutigen Funktion genügt, welche mit dem positiven Wert der Wurzelfunktion überein stimmt, wird es klar, dass die ursprünglich einem speziellen a entsprechende Tafel durch Interpolation zu Argumenten mit willkürlichem, reellem oder komplexem Intervall zu einer Tafel für Exponentialfunktion mit willkürlicher Grundzahl umgebildet wird. Unsere Reihen müssen dann durch passende Wahl von Nullwert und Einheit des Argumentes in der Weise umschrieben werden können, dass die Funktion sich als die Funktion **einer** unabhängigen Variable ohne irgend welchen willkürlichen Parameter ergiebt. Dies erreichen wir, indem wir $1 + \frac{1}{\omega}$ als Grundzahl wählen, wo ω eine Zahl, grösser als jede endliche anzugebende positive Zahl ist; schreiben wir dabei den Exponenten $x = \omega z$ und setzen dies in (47)—(50) ein, ergiebt sich übereinstimmend die wohlbekannte Reihe

$$\lim_{\omega = \infty}\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{z\omega} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = e^z, \tag{52}$$

indem die Grundzahl e durch

$$e = \lim_{\omega = \infty} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

bestimmt wird.

Die Reihe (52) ist für alle endlichen reellen oder komplexen Werte von x konvergent.

Auf dieser Grundlage zeigt man nun leicht, dass der Unterschied zwischen Exponentialfunktionen mit verschiedener Grundzahl sich auf Unterschied der Einheit des Exponenten beschränkt; und wenn man den «natürlichen Logarithmus» als umgekehrte Funktion von e^x einführt, wird

$$a^x = e^{x \log a}. \tag{53}$$

§ 19.

Wenn man vermittelst der Stirlingschen Zahlen (47)—(49) in Potenzreihen entwickelt, giebt ein Vergleich mit (52) nach (53) durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten eine Mannigfaltigkeit von Reihen für die natürlichen Logarithmen und deren Potenzen.

Aus (47 a) ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}
\log a &= a-1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \frac{(a-1)^5}{5} - \dots \\
(\log a)^2 &= (a-1)^2 - \frac{3}{3}(a-1)^3 + \frac{11}{3\cdot4}(a-1)^4 - \frac{50}{3\cdot4\cdot5}(a-1)^5 + \frac{274}{3\cdot4\cdot5\cdot6}(a-1)^6 - \dots \\
(\log a)^3 &= (a-1)^3 - \frac{6}{4}(a-1)^4 + \frac{35}{4\cdot5}(a-1)^5 - \frac{225}{4\cdot5\cdot6}(a-1)^6 + \frac{1624}{4\cdot5\cdot6\cdot7}(a-1)^7 - \dots \\
(\log a)^4 &= (a-1)^4 - \frac{10}{5}(a-1)^5 + \frac{85}{5\cdot6}(a-1)^6 - \frac{735}{5\cdot6\cdot7}(a-1)^7 + \frac{6769}{5\cdot6\cdot7\cdot8}(a-1)^8 - \dots \\
(\log a)^5 &= (a-1)^5 - \frac{15}{6}(a-1)^6 + \frac{175}{6\cdot7}(a-1)^7 - \frac{1960}{6\cdot7\cdot8}(a-1)^8 + \frac{22449}{6\cdot7\cdot8\cdot9}(a-1)^9 - \dots \\
(\log a)^6 &= (a-1)^6 - \frac{21}{7}(a-1)^7 + \frac{322}{7\cdot8}(a-1)^8 - \frac{4536}{7\cdot8\cdot9}(a-1)^9 + \frac{63273}{7\cdot8\cdot9\cdot10}(a-1)^{10} - \dots
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Aus (47 b) ergiebt sich

$$\log a = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^5 + \dots \tag{55}$$

und analoge Gleichungen zu (54) für die Potenzen von $\log a$.

Wenn wir der Kürze wegen $\alpha^2 = \frac{(a-1)^2}{a} = a + \frac{1}{a} - 2$ schreiben, ergeben sich aus (49 a), mit den Zählern $\overset{2m}{III}(2p)$ aus § 13:

$$\begin{aligned}
\log a &= \frac{a^2-1}{2a}\left\{1-\frac{1}{2\cdot 3}a^2+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^4-\frac{36}{2\ldots 7}a^6+\frac{576}{2\ldots 9}a^8-\ldots\right\}\\
(\log a)^2 &= a^2-\frac{1}{3\cdot 4}a^4+\frac{4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}a^6-\frac{36}{3\ldots 8}a^8+\frac{576}{3\ldots 10}a^{10}-\ldots\\
(\log a)^3 &= \frac{a^2-1}{2a}\left\{a^2-\frac{5}{4\cdot 5}a^4+\frac{49}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}a^6-\frac{820}{4\ldots 9}a^8+\frac{21076}{4\ldots 11}a^{10}-\ldots\right\}\\
(\log a)^4 &= a^4-\frac{5}{5\cdot 6}a^6+\frac{49}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}a^8-\frac{820}{5\ldots 10}a^{10}+\frac{21076}{5\ldots 12}a^{12}-\ldots\\
(\log a)^5 &= \frac{a^2-1}{2a}\left\{a^4-\frac{14}{6\cdot 7}a^6+\frac{273}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}a^8-\frac{7645}{6\ldots 11}a^{10}+\frac{296296}{6\ldots 13}a^{12}-\ldots\right\}\\
(\log a)^6 &= a^6-\frac{14}{7\cdot 8}a^8+\frac{273}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}a^{10}-\frac{7645}{7\ldots 12}a^{12}+\frac{296296}{7\ldots 14}a^{14}-\ldots
\end{aligned}\tag{56}$$

Aus (49 b) mit den Zählern $\overset{2m+1}{V}(2p+1)$ aus § 13 ergeben sich:

$$\begin{aligned}
\log a &= a-\frac{1}{4\cdot 6}a^3+\frac{9}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}a^5-\frac{225}{4\ldots 14}a^7+\frac{11025}{4\ldots 18}a^9-\ldots\\
(\log a)^2 &= \frac{a^2-1}{2a}\left\{a-\frac{10}{6\cdot 8}a^3+\frac{259}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}a^5-\frac{12916}{6\ldots 16}a^7+\frac{1057221}{6\ldots 20}a^9-\ldots\right\}\\
(\log a)^3 &= a^3-\frac{10}{8\cdot 10}a^5+\frac{259}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}a^7-\frac{12916}{8\ldots 18}a^9+\frac{1057221}{8\ldots 22}a^{11}-\ldots\\
(\log a)^4 &= \frac{a^2-1}{2a}\left\{a^3-\frac{35}{10\cdot 12}a^5+\frac{1974}{10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}a^7-\frac{172810}{10\ldots 20}a^9+\frac{21967231}{10\ldots 24}a^{11}-\ldots\right\}\\
(\log a)^5 &= a^5-\frac{35}{12\cdot 14}a^7+\frac{1974}{12\cdot 14\cdot 16\cdot 18}a^9-\frac{172810}{12\ldots 22}a^{11}+\frac{21967231}{12\ldots 26}a^{13}-\ldots\\
(\log a)^6 &= \frac{a^2-1}{2a}\left\{a^5-\frac{84}{14\cdot 16}a^7+\frac{8778}{14\cdot 16\cdot 18\cdot 20}a^9-\frac{1234948}{14\ldots 24}a^{11}+\frac{230673443}{14\ldots 28}a^{13}-\ldots\right\}
\end{aligned}\tag{57}$$

Die trigonometrischen Funktionen werden durch $e^{yi}=\cos y+i\sin y$ und $e^{-yi}=\cos y-i\sin y$ (vorausgesetzt dass $i=\sqrt{-1}$) definirt, und aus (52) ergeben sich die bekannten Reihen $\cos y=1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\ldots$ und $\sin y=y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\ldots$ Die Reihen (49 a und b) verwandeln sich für imaginäre Exponenten in Reihen für cos und sin von multiplizirten Bogen. Setzt man $a=e^{ki}$ erhält man aus (49 a)

$$\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})=\cos kx=1-\frac{4x^2}{1\cdot 2}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\frac{4x^2-4}{3\cdot 4}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\ldots-\frac{4x^2-4n^2}{(2n+1)(2n+2)}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\ldots\right.\right.\right.\tag{58}$$

$$\frac{1}{2i}(a^x-a^{-x})=\sin kx=x\sin k\left(1-\frac{4x^2-4}{2\cdot 3}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\ldots-\frac{4x^2-4n^2}{2n(2n+1)}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\ldots\right.\right.\right.\tag{59}$$

und (49 b) giebt

$$\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})=\cos kx=\cos\frac{k}{2}\left(1-\frac{4x^2-1}{1\cdot 2}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\frac{4x^2-9}{3\cdot 4}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\ldots-\frac{4x^2-(2n-1)^2}{(2n-1)2n}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\ldots\right.\right.\right.\right.\tag{60}$$

$$\frac{1}{2i}(a^x-a^{-x})=\sin kx=2x\sin\frac{k}{2}\left(1-\frac{4x^2-1}{2\cdot 3}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\frac{4x^2-9}{4\cdot 5}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\ldots-\frac{4x^2-(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\sin^2\frac{k}{2}\left(1-\ldots\right.\right.\right.\right.\tag{61}$$

Diese Formeln werden im nächsten Abschnitt direkte Anwendung finden.

Setzt man in (58) und (61) $k = \pi$, erhält man die Interpolationsreihen für $\cos \pi x$ und $\sin \pi x$ im 1sten Beispiel des § 15, während (59) und (60) unanwendbar werden. Setzt man in allen 4 Gleichungen $k = \frac{\pi}{2}$, ergeben sich übereinstimmend die Interpolationsreihen im Beispiel 3 des § 15 für $\cos\frac{\pi x}{2}$ und $\sin\frac{\pi x}{2}$. Also erhalten wir den fehlenden Beweis, dass diese periodischen Funktionen, die für die möglichen Korrektionsglieder jeder in einer äquidistanten Tafel interpolirten Funktion Bedeutung haben, wirklich die oben angegebenen trigonometrischen Funktionen sind. Setzt man in (59) und (61) $x = 0$, erhält man, indem $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin kx}{x} = k$, die Reihen für arc sin

$$k = \sin k\left\{1 + \frac{2}{3}\sin^2\frac{k}{2}\left(1 + \frac{4}{5}\sin^2\frac{k}{2}\left(1 + \ldots + \frac{2n}{2n+1}\sin^2\frac{k}{2}\left(1 + \ldots\right)\right)\right)\right\} =$$

$$= 2\sin\frac{k}{2}\left\{1 + \frac{1}{2\cdot 3}\sin^2\frac{k}{2}\left(1 + \frac{9}{4\cdot 5}\sin^2\frac{k}{2}\left(1 + \ldots + \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\sin^2\frac{k}{2}\left(1 + \ldots\right)\right)\right)\right\}.$$

ZWEITER TEIL.

§ 20.

Seit Leibnitz's Zeit ist die Bedeutung des Rechnens mit Operationssymbolen immer grösser geworden, und der Interpolationsrechnung sind die Symbole zwar nicht ganz unentbehrlich, doch aber sehr nützlich. In den gewöhnlichen Darstellungen lernt man oft unbewusst und ohne grosse Schwierigkeit mit Symbolen rechnen. Vermittelst ihrer überwindet man sonst bedeutende Schwierigkeiten, und dann wundert man sich, dass sie regelmässig zu richtigen Resultaten führen. Indess lässt sich die Lehre von den Symbolen ebenso solide begründen wie die Lehre von den Zahlen; und zwar ist dies keineswegs komplizirt, vielmehr äusserst elementar, so dass man ganz von vorn anfangen muss. Dazu ist nur erforderlich, dass die Definition der Zahl selbst in einer solchen Form gegeben wird, dass man danach die eigentlichen Zahlen von den mit ihnen am nächsten verwandten Nicht-Zahlen, nämlich den Symbolen unterscheiden kann. Dies erreichen aber unsere Lehrbücher der elementaren Matematik nicht, da sie viel zu schnell die Besprechung der benannten Zahlen aufgeben und dadurch nicht den Grundbegriff, das

Numerale, die allgemeine ein-eindeutige, einzeln relative Bestimmung erfassen, die sowohl die Zahl als die Symbole trägt und ihren Unterschied zum Vorschein kommen lässt.

Mit Operationen rechnen, ist nicht dem symbolischen Rechnen eigen, auch die Zahlen selbst sind immer Operationsbezeichnungen. Die benannte Zahl giebt immer die Hinzufügungs-Operation an, wodurch eine im Voraus gegebene Vorstellung, die Null, in eine damit gleichartige Vorstellung umgewandelt wird. Die unbenannte Zahl verwandelt ebenfalls durch ihre Multiplikations-Operation eine gegebene Einheit in eine gleichbenannte Zahl.

Aber nicht alle Operationen werden durch Zahlen angegeben. Die Zahlen haben in ihren beiden einzelnen Relativitäten und in ihren in den beiden durchgeführten Ein-Eindeutigkeiten besonders einfache Eigenschaften, und wo nur eine einzige von diesen Eigenschaften modifizirt wird, können wir nicht mehr von Zahlen, sondern nur von Symbolen reden. Eine solche Abweichung kann, in mehreren Punkten erscheinen, besonders aber kann es sich so verhalten, dass diejenigen Operationen, die der Addition und Subtraktion benannter Zahlen entsprechen, völlig dieselben Eigenschaften haben, und dass dasselbe ebenfalls von dem der direkten Multiplikation der unbenannten Zahlen Entsprechendem gilt, dass sogar eine Division sich findet, die aber allerdings nicht eindeutig ist. Ohne Zweifel werden solche Symbole die den Zahlen am allernächst verwandten Begriffe sein. Ein Fall — der allen bekannt ist — gestattet sogar, dass sie zu Zahlen gemacht werden, selbstverständlich durch einen Gebrauch, der die genannte Mehrdeutigkeit aufhebt.

Von dem Potenzbegriffe weiss man, dass, wenn man die gewöhnlichen unbenannten Zahlen als benannte, ihre Multiplikation als eine Addition auffassen will, die Potenziation dann als die entsprechende Multiplikation auftritt. Die Potenzexponenten sollten dann den unbenannten Zahlen entsprechen, und die direkte Potenziation ist auch wie die Multiplikation sowohl eindeutig und associativ als distributiv; das Wurzelausziehen aber ist im Gegensatze zu der Division mehrdeutig, und also werden die Exponenten dann zwar Symbole, jedoch keine Zahlen. Da indess die Exponentialfunktion durch eine Interpolation als eindeutig aufgestellt werden kann, welche wir oben ausführlich dargestellt haben, kann man zwar nicht durch sie die Mehrdeutigkeit des Wurzelsausziehens aufheben, sie aber doch durch einen Gebrauch beherrschen, der uns gestattet, diese Symbole, als ob sie Zahlen wären, zu behandeln.

Ich kann nicht erwarten, dass die Leser irgendwo die Lehre von den Zahlen und von den Symbolen in der hier angedeuteten Weise oder in einer andern, die dem symbolischen Rechnen Beweiskraft geben kann, entwickelt gesehen haben.

Ich kann jedoch an dieser Stelle die Lehre von den Symbolen nicht einmal so ausführlich entwickeln, wie ich es in meinem Universitätsprogramm «Om Tal og Symboler som Bestemmelser mellem Numeraler. Kbhvn. 1901» getan habe. Ich muss mich in meiner folgenden Darstellung von den Symbolen der Interpolationsrechnung damit begnügen, die Regeln ihres Gebrauches anzugeben, blos mit Andeutung der Beweise, die indess nur wenigen genügen werden, welche aber denjenigen nicht schaden können, die sich ferner damit begnügen lassen müssen, die ordnende und sammelnde Methode der Symbolik zu benutzen, ohne hier, mehr wie sonst, Beweise zu fordern.

Der Begriff, der durch die Symbole der Interpolationsrechnung zum Gegenstand umwandelnder Operationen oder Ableitungen gemacht wird, ist die Vorstellung von der eindeutigen Funktion (dem Funktionszweig), aufgefasst als der Inbegriff der den sämtlichen Argumenten entsprechenden Funktionswerte. Man denkt sich den Funktionsbegriff durch eine Tafel, sei es eine wirkliche oder eine gedachte, eine gegebene oder eine gesuchte repräsentirt.

Es wird von den Formeln abgesehen, durch welche man die Funktionswerte unmittelbar berechnet; gleichviel ob es endliche Ausdrücke oder Reihen sind; die Frage: Konvergenz oder Divergenz wird dahingestellt. Ferner wird es bei der symbolischen Interpolationsrechnung eine stehende Voraussetzung, dass man kein Korrektionsglied hinzuzufügen braucht, wenn auch die Tafel äquidistante Argumente mit endlichem Intervalle hat.

A. Dieser Funktionsbegriff hat einen natürlichen Nullbegriff, nämlich die Funktion, die konstant $= 0$ ist. Deshalb werden auch die benannten Symbole, wodurch eine Funktion mittelst einer anderen bestimmt wird, nicht deutlich von den Funktionsbegriffen, welche sie aus der natürlichen Nullfunktion hervorrufen, unterschieden. Geht man von der Nullfunktion aus, bestimmt das benannte Symbol $f(x)$ die Funktion $f(x)$ selbst; wählt man aber zu Null eine Funktion $g(x)$, dann bestimmt das benannte $f(x)$ davon ausgehend, die Summe $f(x) + g(x)$. Die Addition dieser benannten Symbole ist mit der Addition der Funktionswerte identisch. Wir brauchen deshalb nicht bei der Addition oder der Suktraktion der benannten Symbole zu verweilen, welche vollständig mit der Addition und der Subtraktion der gewöhnlichen benannten Zahlen übereinstimmen.

B. Die unserer Funktionsvorstellung entsprechenden unbenannten Symbole müssen solche sein, die eine Funktion durch eine einzige andere Funktion, welche man zur Einheit wählt, eindeutig bestimmen; sie müssen eine derartige Operation angeben, durch welche die Einheitsfunktion zu einer von ihr und nur von ihr abgeleiteten Funktion umgebildet werden kann. Als Analogie des Inbegriffes der mit einer gewöhnlichen Einheit gleichbenannten Zahlen werden wir hier,

aus der Mannigfaltigkeit der Funktionen, engere Systeme der von jeder einzelnen Funktion durch Symbole ableitbaren Funktionen ausscheiden können.

Unter den Operationen, durch welche Funktionen abgeleitet werden können, bietet sich in erster Linie die Änderung der Einheit der Funktionswerte dar, also die Multiplikation der Funktion mit einer beliebigen gewöhnlichen konstanten unbenannten Zahl. Die gewöhnlichen Zahlen behalten auch, wenn sie als solche Symbol-Faktoren aufgefasst werden, ihre sämtlichen Eigenschaften unverändert; alle Sätze der Rechnungsarten, sogar die Eindeutigkeit der Division können insofern in die symbolische Interpolationsrechnung übertragen werden. Es ist nur noch die Frage, ob eine andere Ableitungsart nachgewiesen werden kann, mit deren Symbolen man, wenn auch mit einiger Modifikation der Sätze, rechnen kann.

Es könnte nahe liegen eine solche unter den Multiplikationen mit variabeln Faktoren zu suchen; es werden sich jedoch Schwierigkeiten bieten in der Beziehung, dass man diese Bestimmungen nicht einzeln relativ, ausschliesslich auf eine Einheitsvorstellung bauend, nennen kann. Vor allem aber hat dies für die Interpolationsrechnung nur wenig Interesse.

§ 21.

Die Verschiebung des Argumentes durch einen konstanten Addenden a oder die Ableitung von $f(x+a)$ aus $f(x)$ ist eine solche Operation, die sich zur Bezeichnung mittelst eines Symbols eignet; wir schreiben

$$f(x+a) = A \circ f(x). \tag{62}$$

Das Symbol A ist einzeln relativ, es kann auf jede Funktion angewandt werden, die man sich durch eine Tafel der sämtlichen Werte des Argumentes gegeben denkt, und die Anwendung fordert keine andere Voraussetzung, als dass man die Einheit, den Funktionsbegriff $f(x)$ in seiner Ganzheit kennt oder sich ihn als bekannt denkt. Ist eine Funktion nur für begrenzte Argumente bekannt, oder existirt sie nur für dieselben, ist z. B. ihre Reihenentwickelung ausserhalb dieser Grenzen divergent, kann das Symbol A noch mit einer gewissen Vorsicht angewandt werden, in Analogie mit der Anwendung von allgemeinen Zahlen in Fällen, wo nur positive oder ganze Zahlen Bedeutung haben.

Das Symbol A ist ferner eindeutig; auf eine eindeutige Funktion oder einen eindeutigen Funktionszweig angewandt, wird das Resultat eindeutig. Die Eindeutigkeit gilt hier sogar für die entgegengesetzte, reziproke Ableitung $\frac{1}{A}$, die von $f(x+a)$ zu $f(x)$ zurückführt. Auf $f(x)$ angewandt ist

$$\frac{1}{A} \circ f(x) = f(x-a).$$

Unsere Symbole A und $\frac{1}{A}$ können ferner ganz als unbenannte Zahlen angewandt werden, in multiplikativer Verbindung mit den unbenannten konstanten Zahlen und mit andern Symbolen ihrer eigenen Art, wie das B, das $B \circ f(x) = f(x+b)$ macht. Da diese sämtlichen Ableitungen einzeln relativ und hin und her eindeutig sind, kann jede durch sie aus $f(x)$ bestimmte Funktion zur Einheit einer neuen Bestimmung genommen werden, die aus $f(x)$ durch das Produkt der Symbole bestimmt wird.

Es kann dem Leser selbst überlassen werden, folgende Sätze zu beweisen.

$$A \circ \frac{1}{A} = 1,$$

$$A \circ B \circ f(x) = f(x+a+b),$$

$$d \circ B \circ f(x) = d\,f(x+b),$$

$$(A \circ d) \circ B = A \circ (d \circ B) = A \circ d \circ B.$$

Das Produkt ist eindeutig und associativ. Auch die Division ist hier eindeutig. Wenn

$$A \circ d \circ B = C$$

ist

$$A = C \circ \frac{1}{B} \circ \frac{1}{d},$$

$$d = \frac{1}{A} \circ C \circ \frac{1}{B},$$

$$B = \frac{1}{d} \circ \frac{1}{A} \circ C.$$

Die Multiplikation ist hier sogar kommutativ, denn z. B.

$$A \circ d \circ B \circ e \circ f(x) = d e f(x+a+b).$$

Unsere unbenannten Symbole und unsere konstanten Zahlen können auch addirt werden. Von einer willkürlichen Einheit-Funktion $f(x)$ ausgehend, kann man durch jede derselben eine Funktion ableiten, und als gleichbenannte können diese der Addition benannter Symbole unterworfen werden, und das Resultat kann von der Einheitfunktion eindeutig abgeleitet werden, z. B. ist

$$f(x+a) + b f(x) + c f(x+d) = (A + b + c \circ D) \circ f(x).$$

Die unbenannte Addition ist wie die benannte eindeutig, associativ und kommutativ.

Da $(-1) \circ A \circ b = (-b) \circ A$, fordert die Subtraktion keine besondere Behandlung.

Dass das distributive Prinzip für Kombinationen von unbenannt symbolischer Addition und Multiplikation gilt, beweist man durch die Ableitung der Einheit von einer willkürlichen, gleichbenannten, anderen Einheit.

Setzt man in die obenstehende Gleichung $f(x) = h \circ g(x)$ erhält man

$$(A+b+c \circ D) \circ h = A \circ h + bh + c \circ D \circ h$$

und setzt man $f(x) = H \circ g(x) = g(x+h)$, erhält man

$$(A+b+c \circ D) \circ H = A \circ H + b \circ H + c \circ D \circ H,$$

das distributive Prinzip gilt infolge des kommutativen Prinzipes der Multiplikation für beide Faktoren. Ist für ein einzelnes oder zusammengesetztes Symbol die Einheit selbst durch Addition von Funktionen zusammengesetzt, so kann das distributive Prinzip auch auf diese Einheit angewandt werden

$$(A+a) \circ (f_1(x) + f_2(x)) = (A+a) \circ f_1(x) + (A+a) \circ f_2(x),$$

dies gilt ohne Rücksicht darauf, ob $f_1(x)$ und $f_2(x)$ durch Symbole von einander oder von einer gemeinsamen Einheit abgeleitet werden können.

Noch hat sich also kein Unterschied zwischen den Rechenregeln für Zahlen und Symbole gezeigt.

Die durch Addition und Multiplikation unserer Symbole und der konstanten Zahlen zusammengesetzten Symbole müssen aber näher untersucht werden, und dabei entsteht die Frage, ob Symbole wie A von jeder konstanten Zahl ausgemacht verschieden sind. Im Allgemeinen muss nun diese Frage bejahend beantwortet werden; keine konstante Zahl wird als Faktor jeder Einheitsfunktion $f(x)$ als eine Verschiebung des Argumentes wirken. Es giebt aber Ausnahmen; es finden sich Funktionen, welche, wenn man sie zur Einheit gewisser oder sogar aller Verschiebungssymbole nimmt, nur mit einem konstanten Faktor multiplizirt erscheinen. Ist $f(x)$ konstant, wird keines unserer Symbole A diese Funktion ändern; alle wirken sie als Multiplikation mit 1. Das Symbol A, das eine Addition von a zum Argumente bewirkt, wird, wenn die Einheitsfunktion eine beliebige, rein periodische Funktion mit Periodenlänge $= a$ ist, ebenfalls diese Funktion unverändert lassen. Das allgemeine Symbol A wird, wenn die Einheit eine beliebige Exponentialfunktion c^x ist, $c^a \cdot c^x$ geben, also mit dem konstanten Faktor c^a identisch wirken, dies aber keineswegs, wenn die Rede von andern Einheitsfunktionen ist.

Jede Differenz zwischen einem Verschiebungssymbol und einer konstanten Zahl wird deshalb ein Nullfaktor sein, wobei ein von 0 verschiedenes Symbol zu verstehen ist, das doch mit gewissen andern, benannten oder unbenannten, ebenfalls von 0 verschiedenen Faktoren multiplizirt, das Produkt $= 0$ macht. Die Matematik der Zahlen kennt diesen, eben die Lehre von den mit den Zahlen nächst verwandten Symbolen charakterisirenden Begriff nicht.

Jede Division, wo der Divisor ein Nullfaktor ist, ist mehrdeutig, giebt zum Teil unbestimmte Quotienten. Wenn n als Nullfaktor erscheint, d. h. wenn $n \circ m = 0$, während weder n noch $m = 0$, und allgemein $n \circ p = q$, muss auch $n \circ (p + rm) = q$;

der Quotient $\frac{q}{n}$ ist also kein bestimmtes Symbol p, sondern $p + r \cdot m$, wo r eine willkürliche Zahl ist.

In unserer symbolischen Interpolationsrechnung ist, wie gesagt, $A - b$ ein Nullfaktor, dessen Multiplikation mit gewissen Einheitsfunktionen 0 giebt. Die Unbestimmtheit, die infolge Division durch $A - b$ oder infolge Multiplikation mit $\frac{1}{A-b}$ erscheint, hat die Form eines exponentiellen Addenden

$$p_a(x) b^{\frac{x}{a}},$$

wo $p_a(x)$ eine willkürliche, periodische Funktion mit Periode $= a$ bezeichnet. Denn wenn

$$(A - b) \circ f(x) = g(x),$$

wird auch

$$(A - b) \circ \left(f(x) + p_a(x) b^{\frac{x}{a}}\right) = g(x) + p_a(x + a) b^{\frac{x+a}{a}} - b p_a(x) b^{\frac{x}{a}} = g(x),$$

also

$$\frac{1}{A - b} \circ g(x) = f(x) + p_a(x) b^{\frac{x}{a}}. \tag{63}$$

Wie gross auch die Unbestimmtheit ist, welche die Division jedes einzelnen solchen Nullfaktors mit sich führt, ist sie doch auf die hier angegebene Form beschränkt; denn fasst man $p_a(x), b^{\frac{x}{a}}$ als eine völlig unbekannte Funktion auf, würde die Bedingung, unter der sie $= 0$ durch die Operation $A - b$ würde, diejenige sein, dass $p_a(x+a) = p_a(x)$; dies ist aber eben die Definition einer rein periodischen Funktion mit der Periode $= a$, darunter speziell, dass $p_a(x)$ konstant sein kann, oder die Periodenlänge ein Submultiplum von a. Auch die Multiplikation von solchen unbenannten binomen Nullfaktoren wird kein mit 0 identisches Produkt geben, und also aus jeder Einheitsfunktion die konstante Null als ihre Produktfunktion ableiten, so dass eine Division durch ein solches unbenanntes symbolisches Produkt völlig unbestimmt oder unendlich würde. Nur eine gewisse bestimmte Klasse von Funktionen können, wenn sie als Einheiten aufgefasst werden, in einer Multiplikation mit diesen Nullfaktoren Null geben.*) Diese besonderen Funktionen sind «rekurrente» Funktionen, die man darstellen kann als eine Summe von Exponentialfunktionen, mit ganzen algebraischen Funktionen multiplizirt, deren Koeffizienten periodische Funktionen statt Konstanten sein können (siehe §§ 22 und 23).**)

*) Anders verhällt es sich mit den Symbolen der Zahlenteorie, die sich auch nur durch das Vorkommen von Nullfaktoren von den Zahlen unterscheiden. Man kann dort die Kongruenzen als Gleichungen auffassen, indem nur das Zahlensystem gegen ein solches umgetauscht wird, in dem der Modulus $p = 0$; ist dann p keine Primzahl, werden die Primfaktoren Nullfaktoren, die einander, für jede benannte oder unbenannte Einheit, zu 0 supplieren.

**) Die besondere Stellung dieser Funktionen zeigt die Notwendigkeit, die benannten Symbole, als für die definitionsmässige Begründung des Interpolationssymboles besonders unentbehrlich festzuhalten, und nicht, wie in der traditionellen Darstellung der Zahlenlehre, ausschliesslich von den unbenannten Zahlen zu reden, nachdem man so schnell wie möglich die benannten Zahlen abgefertigt hat.

Aus dem Vorhergehenden ist zu entnehmen, dass die Unbestimmtheit der Division von der zwei- oder mehrgliedrigen Form des Divisors bedingt ist. Die unbenannten Verschiebungssymbole, A selbst, sowohl als die konstanten Zahlen b, geben als Divisoren völlig bestimmte Quotienten, ihre Differenz aber giebt unbestimmte.

Auch Differenzen zwischen zwei Verschiebungssymbolen sind Nullfaktoren oder enthalten solche. Da $\frac{A}{B}$ auch ein Verschiebungssymbol ist, wird $A-B=\left(\frac{A}{B}-1\right)\circ B$, wo $\frac{A}{B}-1$ ein Nullfaktor ist. Ausser dieser eventuellen Unbestimmtheit der Divisionen, kann man also mit den Verschiebungssymbolen in ihren sämtlichen Kombinationen untereinander und mit konstanten Zahlen ganz nach den für die eigentlichen Zahlen geltenden Gesetzen rechnen.

§ 22.

Zwischen den Verschiebungssymbolen A und B bestehen symbolische Relationen, und es ist möglich, sie alle von einem einzigen abzuleiten, besonders von demjenigen, dass die Verschiebung des Argumentes mit einer Einheit darstellt: $E\circ f(x) = f(x+1)$. Für ganze Werte von n sind sowohl $E^n\circ f(x) = f(x+n)$ als $E^{-n}\circ f(x) = f(x-n)$ durch symbolische Multiplikation von n identischen Symbolen E oder $\frac{1}{E}$ bestimmt; das Symbol E und seine Potenzen sind in einer äquidistanten Tafel mit dem Intervalle 1 als unmittelbar gegeben vorhanden. Die Bestimmung jeder anderen Verschiebung a des Argumentes fordert nur die volle Entwickelung des Potenzbegriffes in der Exponentialfunktion —

$$A\circ f(x) = f(x+a) = E^a\circ f(x)$$

— und ist, wie man sieht, mit allgemeiner Interpolation gleichbedeutend.

Eine allgemeine und selbständige Entwickelung des Begriffes «symbolische Exponentialfunktion» ist hier überflüssig. Was das Interpolationssymbol E^a betrifft, ist eine Anwendung der Reihen für die Exponentialfunktion der Zahlen berechtigt, weil bei der Ableitung dieser Reihen nur Sätze angewandt werden, die ebenso wohl für die Symbole als für die Zahlen gelten. Diese Reihen zeigen sich aber mit denjenigen identisch, die man für Interpolation nach der Formel Newtons für äquidistante Argumente hat.

Die Mehrdeutigkeit des symbolischen Wurzelausziehens in Betreff reeller Funktionen schneidet man dadurch leicht ab, dass die Funktion nicht in jedem Intervalle imaginär werden darf. Dies ist damit analog, dass man die reelle und positive Wurzel in der Zahlenlehre vorzieht.

Die Nullfaktoren, die durch Subtraktion konstanter Zahlen von E zum Vorschein kommen, werden nur dadurch spezieller als diejenigen sein, die sich an A

knüpfen, dass die periodische Funktion $p_a(x)$ in (63) eben Periodenlängen haben muss, die Submultipla von der Verschiebung a und nicht von 1 sind. Da diese periodischen Funktionen im Folgenden keine Bedeutung für uns bekommen, werden wir mit dieser Reservation uns darauf beschränken, ausschliesslich $p_a(x)$ als Konstante zu betrachten, und so können wir überall die Verschiebungssymbole A, B durch Potenzen von E ersetzen und uns darauf beschränken, das Binom $E-a$ als die allgemeine Form der einzelnen Nullfaktoren zu betrachten. Wir können die allgemeine Funktionsform der entsprechenden Nulleinheit bestimmt erhalten, indem wir sie $f(x)a^x$ mit unbekannter Bedeutung von $f(x)$ schreiben. Wenn $f(x)a^x$ durch Multiplikation mit $E-a$ die 0 werden soll, muss

$$(E-a)\circ f(x)a^x = (f(x+1)-f(x))a^{x+1} = 0. \qquad (64)$$

Daraus folgt, dass $f(x+1)=f(x)$, da a^{x+1} nicht 0 für endliches x wird. Soll dann nach unserer Reservation $f(x)$ keine periodische Funktion sein, fordert $f(x+1)=f(x)$, dass $f(x)$ konstant sein muss.

Wenn wir umgekehrt, um eine allgemeinere Form der Nullfaktoren zu suchen, $f(x)$ eine ganze rationale Funktion des Grades $\alpha-1$ bedeuten lassen und fragen, ob $f(x)a^x$ dann die Nulleinheit sein kann, und was der entsprechende Nullfaktor sein muss, dann wird der Faktor $E-a$ im Allgemeinen nicht 0 hervorbringen, sondern $(f(x+1)-f(x))$ wird wiederum eine rationale Funktion, und der Grad ist dann eben $\alpha-2$. Durch α-mal wiederholte Multiplikation mit dem Symbol $E-a$, also durch Multiplikation mit $(E-a)^\alpha$ muss dann $f(x)a^x$ das Produkt 0 geben, und $(E-a)^\alpha$ ist dann der entsprechende Nullfaktor.

Ist b eine von a verschiedene, konstante Zahl, wird dagegen die Multiplikation von $f(x)a^x$ mit dem Symbol $E-b$

$$(E-b)\circ f(x)a^x = (af(x+1)-bf(x))a^x \qquad (65)$$

geben, welches nur in den Konstanten der ganzen Funktion, nicht aber in dem Grade noch in dem exponentiellen Faktor abweicht.

§ 23.

Hieraus folgt ein Satz über die rekurrente Funktion

$$R(x) = f_{\alpha-1}(x)\cdot a^x + f_{\beta-1}(x)b^x + f_{\gamma-1}(x)c^x + \ldots, \qquad (66)$$

wo a, b, c Konstanten sind, und wo die Indices der Funktionen ihre Grade angeben. Wenn durch Multiplikation mit binomen Symbolen $R(x)$ die 0 geben soll, müssen von solchen α-mal $E-a$, β-mal $E-b$ und γ-mal das Symbol $E-c$ angewandt werden. Die Ordnung dieser Faktoren ist gleichgültig, ebenfalls die Einmischung von anderen Faktoren. Jedes einzelne binome Symbol greift nämlich nur sein

entsprechendes Glied mit der Wirkung an, dass der Grad des ganzen Faktors mit einer Einheit abnimmt, während die anderen Glieder nur eine Veränderung der Konstanten, dagegen aber keine des Grades, erleiden.

Das in dieser Weise zusammengesetzte symbolische Potenzprodukt

$$\Phi = (E-a)^{\alpha} \circ (E-b)^{\beta} \circ (E-c)^{\gamma} \circ \ldots \tag{67}$$

ist also ein Nullfaktor, und eben der, dem die rekurrente Funktion in (66) als Nulleinheit entspricht:

$$\Phi \circ R(x) = 0.$$

Bei symbolischer Division mit Φ tritt also eine Unbestimmtheit auf, derart, dass $R(x)$ in (66) mit willkürlichen Koeffizienten zu der Funktion addirt gedacht werden muss, welche als symbolischer Quotient abgeleitet wird:

$$(E-a)^{\alpha} \circ (E-b)^{\beta} \circ (E-c)^{\gamma} \circ \ldots \circ \{F(x) + f_{\alpha-1}(x)\, a^{x} + f_{\beta-1}(x)\, b^{x} + \ldots\} = \Phi \circ F(x). \tag{68}$$

Das symbolische Produkt Φ in (67) kann, ganz als ob E eine gewöhnliche Zahl wäre, in ein Polynomium entwickelt werden,

$$\Phi = E^{n} + k_1 E^{n-1} + \ldots + k_{n-1} E + k_n\,, \tag{69}$$

dessen Grad $n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$, und dessen Koeffizienten die bekannten, symmetrischen Funktionen von $(-a)\alpha$-mal genommen, $(-b)\beta$-mal genommen u. s. w. sind. Die Gleichung (69) erläutert den Namen «rekurrent» für die Funktionen (66), für welche $\Phi \circ R(x) = 0$; denn nach (69) ist

$$R(x+n) + k_1 R(x+n-1) + \ldots + k_{n-1} R(x+1) + k_n R(x) = 0$$

und folglich kann $R(x+n)$ für diese Funktionen durch rekurrente Reihe berechnet werden, wenn man die n vorhergehenden Funktionswerte in einer äquidistanten Tafel kennt.

Wenn eine der Wurzeln, z. B. a gleich 1 ist, wird das entsprechende Glied in (66) eine ganze rationale Funktion. Diese Funktionen sind also rekurrente Funktionen der einfachsten Art und Nulleinheiten, deren entsprechende Nullfaktoren einfache Differenzen sind.

Wenn eine rekurrente Funktion für reelle Argumente reell sein soll, müssen die Rekursionselemente $k_1 \ldots k_n$ ebenfalls reell sein. Die Wurzeln in (69) müssen dann entweder reelle oder gepaarte komplexe Zahlen sein, so dass i $-i$ entspricht. Sind alle Wurzeln positiv, ist die rekurrente Funktion als die Summe von entsprechenden reellen Exponentialfunktionen mit ganzen Funktionen als Faktoren gebaut. Ist irgend eine Wurzel negativ reell, wird die einfachste Gestalt der Rekursionsformel eine solche sein, wo in jedem der äquidistanten Tafel-Intervalle komplexe Funktionswerte für reelle Argumente auftreten. Nur durch Verdoppelung solcher Wurzeln kann dann die Funktion reell gehalten werden. Hat ein komplexes Wurzelpaar die Form $r(\cos v \pm i \sin v)$, und tritt also $E^2 - 2r\cos v \cdot E + r^2$ als

reeller Faktor des 2^{ten} Grades in (69) auf, können die entsprechenden Glieder in dem Ausdruck der rekurrenten Funktion (66) zu der allgemeinen Form

$$\left(C_{\rho-1}(x)\cos v x + S_{\rho-1}(x)\sin v x\right) r^x$$

zusammengezogen werden, wo $C_{\rho-1}$ und $S_{\rho-1}$ zwei ganze Funktionen des $\rho-1^{\text{ten}}$ Grades bezeichnen, wobei es vorausgezetzt wird, dass das Symbol $(E^2-2r\cos v\cdot E+r^2)$ ρ-mal als Faktor auftritt. Ist hier $r=1$, treten periodische Glieder mit willkürlichen Perioden, $\frac{2\pi}{v}$, ohne exponentiellen Faktor als Glieder rekurrenter Funktionen auf, aus denen sie durch Operationen nach Symbolen $E^2-2\cos v\cdot E+1$ ausgeschieden werden können.

§ 24.

Die Exponentialfunktion ist, was die Zahlen betrifft, ein spezielles Resultat der Interpolation Newtons. Die symbolische Exponentialfunktion bedeutet einfach die äquidistante Interpolationsoperation.

Die symbolische Interpolationsrechnung macht auch keinen Anspruch darauf, wesentlich Neues zu bringen, sondern nur darauf, Erleichterung der Ableitung und Einfachheit der Bezeichnungen dadurch zu geben, dass jede symbolische Gleichung als eine Rechenregel aufgefasst werden kann, die für die ganze Tafel gilt, und nach der man die numerischen Rechnungen der speziellen Fälle ausführen kann.

Um dieses zu realisiren, werden wir Zeichen für einige besondere Symbole einführen, welche alle von E abhängig sind und wichtige Rechenoperationen bezeichnen, die bald als bekannt, bald als unbekannt, durch die symbolischen Gleichungen verknüpft auftreten.

Das Symbol der Bildung einer ersten dividirten Differenz für die Argumente x und $x+a$ ist

$$\left.\begin{aligned}\delta(x, x+a) &= \frac{f(x+a)-f(x)}{a} = \frac{E^a-1}{a}\circ f(x) = \frac{e^{a\log E}-1}{a}\circ f(x) = \\ &= \left(\log E+\frac{a}{2}(\log E)^2+\frac{a^2}{6}(\log E)^3+\dots\right)\circ f(x)\end{aligned}\right| \qquad (70)$$

für $a=0$ fallen die Argumente x und $x+a$ zusammen, und die dividirte Differenz wird der Differentialquotient. Schreiben wir das Differentialsymbol D, d. h. $\frac{df(x)}{dx} = D\circ f(x)$, ist nach (70)

$$D = \log E \quad \text{und} \quad E = e^D. \qquad (71)$$

Wenn wir die Reihe für die symbolische Exponentialfunktion $A = e^{aD}$ aufschreiben, erhalten wir

$$A = E^a = 1+\frac{a}{1}D+\frac{a^2}{2!}D^2+\dots+\frac{a^n}{n!}D^n+\dots, \qquad (72)$$

d. h. die Reihe Taylors; als Interpolationsformel setzt sie die Differentialquotiente als bekannt voraus. Man hat nämlich

$$D^n \circ f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}. \tag{73}$$

Da die Integration die der Differentiation entgegengesetzte Operation ist, muss das Integrationssymbol das reziproke Symbol von D sein

$$D^{-1} \circ f(x) = \frac{1}{\log E} \circ f(x) = \int^x f(x)\,dx. \tag{74}$$

Wie aus (70) ersichtlich, ist D sowie das Symbol dividirter Differenzen ein binomes Symbol; die Integration wird folglich unbestimmt, und dass diese Unbestimmtheit in der Addition einer willkürlichen Konstante besteht, sieht man daraus, dass die Unbestimmtheit des reziproken Symbols der allgemeinen dividirten Differenz $\frac{a}{\Lambda - 1} \circ f(x) = g(x) + p_a(x)\, 1^{\frac{x}{a}}$ ist, also, wenn $a = 0$,

$$D^{-1} \circ f(x) = g(x) + \text{konst.} \tag{75}$$

weil eine periodische Funktion mit unendlich kurzer Periode hier als konstant aufgefasst werden muss, wie auch eine Exponentialfunktion mit der Grundzahl 1.

Mindestens eben so wichtig sind indess Bestimmungen, wo D und D^{-1} als das Unbekannte stehen; hierzu hat man Reihen für die Logarithmenfunktion nötig; betrachten wir jedoch die reiche Sammlung, die wir in § 19 fanden, dann wird es klar, dass mehrere andere Symbole eingeführt werden müssen, die nach der Sachlage als bekannt betrachtet werden können. Besonders muss die Differenzbildung ihre Symbole haben, und zwar verschieden, je nach der verschiedenen Weise, in der man das Verhältnis der Differenzfunktionen zum Argumente auffassen kann. Die Forderung, dass die Operation, die mittelst eines Symbols angegeben werden soll, ganz dieselbe für das ganze Gebiet der Funktion sein soll, wird hier andere Tafel-Formen als die äquidistante ausschliessen und weitere Gedanken an die dividirten Differenzen abschneiden. Noch bestimmter als im § 12 müssen wir in symbolischer Interpolations-Rechnung festhalten, dass alle einfachen Differenzen der äquidistanten Tafel als Funktion eines einzigen Argumentes aufgefasst werden, wie die Funktion, wovon sie abgeleitet werden. Aus Zweckmässigkeitsgründen wird man bald das erste, bald das letzte und bald das mittlere der faktisch vorkommenden Argumente wählen.

Wir führen das Symbol $\diagdown$ für die erste Differenz auf absteigender, $\diagup$ für die auf aufsteigender Schräglinie und $\triangle$ für Differenzen auf der Zeile des mittleren Argumentes ein:

$$\left.\begin{aligned} \diagdown \circ f(x) &= f(x+1) - f(x) &&= (E-1) \circ f(x) \\ \diagup \circ f(x) &= f(x) - f(x-1) &&= (1 - E^{-1}) \circ f(x) \\ \triangle \circ f(x) &= f(x+\tfrac{1}{2}) - f(x-\tfrac{1}{2}) &&= (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}) \circ f(x). \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Für die Differenzen von höherer Ordnung muss, weil diese Operationen von identischen symbolischen Faktoren zusammengesetzt sind, geschrieben werden

$$\diagdown^n = (E-1)^n, \quad \diagup^n = (1-E^{-1})^n \quad \text{und} \quad \triangle^n = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})^n. \tag{77}$$

Sollen wir uns die Differenzen mit einem andern Intervall a als mit der Einheit der Argumente der Tafel gebildet denken, bringen wir a als Index unter dem Symbole an, z. B.

$$\diagdown_a = (E^a - 1) = A - 1. \tag{78}$$

In (77) setzten wir voraus, dass die Ordnung der Differenzen ganz und reell sei; sie kann aber sehr wohl negativ sein. Besonders bedeuten

$$\diagdown^{-1} = \frac{1}{E-1}, \quad \diagup^{-1} = \frac{E}{E-1} \quad \text{und} \quad \triangle^{-1} = \frac{E^{\frac{1}{2}}}{E-1} \tag{79}$$

Summen der Funktionswerte mit dem Intervalle 1.

Summirung ist nämlich die der Differenzbildung entgegengesetzte Operation.

Die Division durch das Binom $E-1$ macht alle Summen unbestimmt, so dass eine willkürliche Konstante als Addend nötig ist, was damit übereinstimmt, dass der Ausgangspunkt der Summirung willkürlich ist.

In den Reihenentwickelungen

$$\left.\begin{aligned} \diagdown^{-1} &= E^{-1} + E^{-2} + E^{-3} + \ldots + p_1(x) \\ \diagup^{-1} &= 1 + E^{-1} + E^{-2} + \ldots + p_1(x+1) \\ \triangle^{-1} &= E^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{3}{2}} + E^{-\frac{5}{2}} + \ldots + p_1\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

darf man nicht vergessen, die Unbestimmtheit mittelst Addition der Konstante oder eigentlich der periodischen Funktion $p_1(x)$ (die Periode $= 1$) zu markiren. Die Unbestimmtheit verschwindet aber, wenn von endlichen Summen die Rede ist. Der symbolische Ausdruck dafür ist die Multiplikation der unendlichen Summen mit $\diagdown_n = E^n - 1$, also

$$(E^n - 1) \circ \diagdown^{-1} = \frac{E^n - 1}{E-1} = 1 + E + \ldots + E^{n-2} + E^{n-1}. \tag{81}$$

Das Symbol für bestimmtes Integral zwischen den Grenzen von a bis zu b ist ebenfalls

$$\int_a^b = (E^b - E^a) \circ D^{-1} = E^a \circ \diagdown_{b-a} \circ D^{-1}.$$

Die Summen der n^{ten} Ordnung $\diagdown^{-n}$, $\diagup^{-n}$ und $\triangle^{-n}$ werden noch unbestimmter. Ganze rationale Funktionen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung geben nämlich 0 durch Multiplikation mit den Symbolen $\diagdown^n$, $\diagup^n$ und $\triangle^n$, entsprechen also als Nulleinheiten diesen Nullfaktoren, aber die Konstanten dieser ganzen Ergänzungsfunktionen können ausserdem durch periodische Funktionen mit der Periode $= 1$ erzetzt werden.

Im Folgenden werden wir ausserdem eines Symboles bedürfen für die Operation, die Mittelzahl zweier Funktionswerte zu bilden, deren Argumente das Intervall a

haben. Indem wir diese Mittelzahl als Funktion der Mittelzahl der Argumente auffassen, schreiben wir

$$\Box_a \circ f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(x+\frac{a}{2}\right)+f\left(x-\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{a}{2}}+E^{-\frac{a}{2}}\right), \tag{82}$$

speziell ist

$$\Box = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}}+E^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Beispiel 1. Wie kann man direkt die 4te Differenz auf absteigender Schräglinie berechnen?

Antwort: $\diagdown^4 = 1-4E+6E^2-4E^3+E^4$.

Generalisire!

Beispiel 2. Finde und erläutere die Relation zwischen $\diagdown$ und $\diagup$!

Antwort: $\diagdown \circ \diagup = \diagdown - \diagup = \triangle^2$.

Beispiel 3. Drücke $\triangle_3$ als symbolische Funktion von $\triangle$ aus!

Antwort: $\triangle_5 = 5\triangle + 5\triangle^3 + \triangle^5$.

Beispiel 4. Drücke E durch $\triangle$ aus!

Antwort: $E = \dfrac{2+\triangle^2+\triangle \circ \sqrt{4+\triangle^2}}{2}$.

Beispiel 5. Finde und erläutere die Relation zwischen $\triangle$ und $\Box$!

Antwort: $4+\triangle^2 = 4\Box^2$.

Beispiel 6. Finde einfache Ausdrücke durch $\triangle$ und $\Box$ für $\triangle_2^2$ und für $\triangle_2$ selbst!

Antwort: $\triangle_2^2 = 4\triangle^2+\triangle^4$ und $\triangle_2 = 2\Box \circ \triangle$.

§ 25.

Sowohl die Differenzen auf Schräglinie als die entsprechenden Summen berechnet man so leicht, wenn eine äquidistante Tafel vorliegt, dass sie in der Regel als bekannt betrachtet werden können, und wird es notwendig solche von hoher Ordnung direkt zu berechnen, deren niedrigere Ordnungen nicht vorliegen, kann die Binomialformel dazu angewandt werden:

$$\diagdown^n = (E-1)^n = E^n - \frac{n}{1}E^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}E^{n-2} - \ldots + (-1)^n, \tag{83}$$

$$\diagup^n = (1-E^{-1})^n = 1-\frac{n}{1}E^{-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}E^{-2} - \ldots + (-E^{-1})^n. \tag{84}$$

Setzen wir voraus, dass sämtliche Differenzen auf der Schräglinie bekannt sind, giebt die symbolische Binomialformel auf $E^a = (1+\diagdown)^a = (1-\diagup)^{-a}$ angewandt, die Interpolationsformeln

$$\left.\begin{aligned}
E^a &= 1+\frac{a}{1}\diagdown+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}\diagdown^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\diagdown^3+\ldots\\
&= 1+\frac{a}{1}\Bigl(\diagdown+\frac{a-1}{2}\Bigl(\diagdown^2+\frac{a-2}{3}\Bigl(\diagdown^3+\ldots+\frac{a-n}{n+1}\Bigl(\diagdown^{n+1}+\ldots\\
E^a &= 1+\frac{a}{1}\diagup+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}\diagup^2+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\diagup^3+\ldots\\
&= 1+\frac{a}{1}\Bigl(\diagup+\frac{a+1}{2}\Bigl(\diagup^2+\frac{a+2}{3}\Bigl(\diagup^3+\ldots+\frac{a+n}{n+1}\Bigl(\diagup^{n+1}+\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(85)$$

Am wichtigsten ist der spezielle Fall

$$\left.\begin{aligned}
E^{\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}\diagdown-\frac{1}{8}\diagdown^2+\frac{1}{16}\diagdown^3-\frac{5}{128}\diagdown^4+\frac{7}{256}\diagdown^5-\frac{21}{1024}\diagdown^6+\frac{33}{2048}\diagdown^7\ldots\\
&= 1+\frac{1}{2}\Bigl(\diagdown-\Bigl(\frac{1}{4}\diagdown^2-\Bigl(\frac{3}{6}\diagdown^3-\frac{5}{8}\diagdown^4-\ldots-\frac{2n-3}{2n}\Bigl(\diagdown^n-\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(86)$$

Zur 3- und 5-Teilung des Intervalles der Argumente, besonders in den äussersten Intervallen der Tafel, wo § 28 unanwendbar ist, kann man sich auch häufig folgender Formeln erfreuen:

$$\left.\begin{aligned}
E^{\frac{1}{3}} &= 1+\frac{1}{3}\Bigl(\diagdown-\frac{2}{6}\Bigl(\diagdown^2-\frac{5}{9}\Bigl(\diagdown^3-\frac{8}{12}\Bigl(\diagdown^4-\ldots-\frac{3n-4}{3n}\Bigl(\diagdown^n-\ldots\\
E^{\frac{2}{3}} &= 1+\frac{2}{3}\Bigl(\diagdown-\frac{1}{6}\Bigl(\diagdown^2-\frac{4}{9}\Bigl(\diagdown^3-\frac{7}{12}\Bigl(\diagdown^4-\ldots-\frac{3n-5}{3n}\Bigl(\diagdown^n-\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(87)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
E^{\frac{1}{5}} &= 1+\frac{1}{5}\Bigl(\diagdown-\frac{4}{10}\Bigl(\diagdown^2-\frac{9}{15}\Bigl(\diagdown^3-\frac{14}{20}\Bigl(\diagdown^4-\ldots-\frac{5n-6}{5n}\Bigl(\diagdown^n-\ldots\\
E^{\frac{2}{5}} &= 1+\frac{2}{5}\Bigl(\diagdown-\frac{3}{10}\Bigl(\diagdown^2-\frac{8}{15}\Bigl(\diagdown^3-\frac{13}{20}\Bigl(\diagdown^4-\ldots-\frac{5n-7}{5n}\Bigl(\diagdown^n-\ldots\\
E^{\frac{3}{5}} &= 1+\frac{3}{5}\Bigl(\diagdown-\frac{2}{10}\Bigl(\diagdown^2-\frac{7}{15}\Bigl(\diagdown^3-\frac{12}{20}\Bigl(\diagdown^4-\ldots-\frac{5n-8}{5n}\Bigl(\diagdown^n-\ldots\\
E^{\frac{4}{5}} &= 1+\frac{4}{5}\Bigl(\diagdown-\frac{1}{10}\Bigl(\diagdown^2-\frac{6}{15}\Bigl(\diagdown^3-\frac{11}{20}\Bigl(\diagdown^4-\ldots-\frac{5n-9}{5n}\Bigl(\diagdown^n-\ldots
\end{aligned}\right\}.\quad(88)$$

Ebenfalls kann die Extrapolation

$$E^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\Bigl(\diagdown-\frac{3}{4}\Bigl(\diagdown^2-\frac{5}{6}\Bigl(\diagdown^3-\frac{7}{8}\Bigl(\diagdown^4-\ldots-\frac{2n-1}{2n}\Bigl(\diagdown^n-\ldots \quad(89)$$

mit Vorsicht angewandt, gelegentlich dienlich sein.

Diese und die folgenden eigentlichen Interpolationsformeln können ohne Schwierigkeit auch angewandt werden, wo das Intervall der Argumente nicht $=1$ ist; man hat es nicht für notwendig angesehen, das allgemeine Intervall a und die Symbole $\diagup_a^n$ und $\diagdown_a^n$ einzuführen.

Wenn wir jetzt aber die Formeln für numerische Differentiation und Integration entwickeln sollen, ist es erwünscht, dass das Intervall der Tafel angegeben wird; und das geschieht sehr leicht, indem man die symbolische Gleichung $aD = \log E^a = \log(1+\diagdown_a) = -\log(1-\diagup_a)$ zur Ableitung der Formeln anwendet. Also erhält man unmittelbar aus den Logarithmenreihen (54)

$$\left.\begin{aligned}
D &= a^{-1}\Big(\diagdown_a - \frac{1}{2}\diagdown_a^{2} + \frac{4}{12}\diagdown_a^{3} - \frac{6}{24}\diagdown_a^{4} + \frac{144}{720}\diagdown_a^{5} - \frac{240}{1440}\diagdown_a^{6} + \frac{8640}{60480}\diagdown_a^{7} - \frac{15120}{120960}\diagdown_a^{8} + \ldots\\
D^2 &= a^{-2}\Big(\diagdown_a^{2} - \frac{2}{2}\diagdown_a^{3} + \frac{11}{12}\diagdown_a^{4} - \frac{20}{24}\diagdown_a^{5} + \frac{548}{720}\diagdown_a^{6} - \frac{1008}{1440}\diagdown_a^{7} + \frac{39204}{60480}\diagdown_a^{8} - \frac{73056}{120960}\diagdown_a^{9} + \ldots\\
D^3 &= a^{-3}\Big(\diagdown_a^{3} - \frac{3}{2}\diagdown_a^{4} + \frac{21}{12}\diagdown_a^{5} - \frac{45}{24}\diagdown_a^{6} + \frac{1392}{720}\diagdown_a^{7} - \frac{2814}{1440}\diagdown_a^{8} + \frac{118124}{60480}\diagdown_a^{9} - \frac{234540}{120960}\diagdown_a^{10} + \ldots\\
D^4 &= a^{-4}\Big(\diagdown_a^{4} - \frac{4}{2}\diagdown_a^{5} + \frac{34}{12}\diagdown_a^{6} - \frac{84}{24}\diagdown_a^{7} + \frac{2901}{720}\diagdown_a^{8} - \frac{6408}{1440}\diagdown_a^{9} + \frac{289472}{60480}\diagdown_a^{10} - \frac{611600}{120960}\diagdown_a^{11} + \ldots\\
D^5 &= a^{-5}\Big(\diagdown_a^{5} - \frac{5}{2}\diagdown_a^{6} + \frac{50}{12}\diagdown_a^{7} - \frac{140}{24}\diagdown_a^{8} + \frac{5345}{720}\diagdown_a^{9} - \frac{12825}{1440}\diagdown_a^{10} + \frac{621260}{60480}\diagdown_a^{11} - \frac{1393810}{120960}\diagdown_a^{12} + \ldots
\end{aligned}\right\}(90)$$

Man kann diese Formeln aus der Gleichung (47 a) ausschreiben, wenn man darin die Stirlingschen Zahlen $\overset{m}{I}(p)$ (pag. 31) einführt. Viele der Brüche in (90) können gekürzt werden; besonders ist dies in der Gleichung für D auffallend, die gekürzt

$$D = a^{-1}\Big(\diagdown_a - \frac{1}{2}\diagdown_a^{2} + \frac{1}{3}\diagdown_a^{3} - \frac{1}{4}\diagdown_a^{4} + \ldots - \frac{(-1)^r}{r}\diagdown_a^{r} - \ldots \qquad (91)$$

ist; aber die obenstehende Gestalt zeigt, dass in dem allgemeinen Ausdruck

$$D^n = a^{-n}\Big(\diagdown_a^{n} - b_n\diagdown_a^{n+1} + c_n\diagdown_a^{n+2} - d_n\diagdown_a^{n+3} + e_n\diagdown_a^{n+4} - \ldots \qquad (92)$$

die Koeffizienten $b_n \ldots e_n$ ganze rationale Funktionen des ersten, des zweiten u. s. w. Grades von n sind. Dies kann zur Darstellung der entsprechenden Integrationsformeln benutzt werden, welche zwar auch durch symbolische Division von den Reihen (90) $D^{-n} = \frac{1}{D^n}$ gefunden werden können, leichter und sicherer aber, durch Extrapolation der Funktionswerte $b_n \ldots e_n$ für negative Werte von n berechnet werden (man beachte, dass $b_0 \ldots e_0 \ldots = 0$).

Dadurch erhält man

$$\left.\begin{aligned}
D^{-1} &= a\ \Big(\diagdown_a^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\diagdown_a + \frac{1}{24}\diagdown_a^{2} - \frac{19}{720}\diagdown_a^{3} + \frac{27}{1440}\diagdown_a^{4} - \frac{863}{60480}\diagdown_a^{5} + \frac{1375}{120960}\diagdown_a^{6} \cdots\\
D^{-2} &= a^2\Big(\diagdown_a^{-2} + \frac{2}{2}\diagdown_a^{-1} + \frac{1}{12} + 0\,\diagdown_a - \frac{3}{720}\diagdown_a^{2} + \frac{6}{1440}\diagdown_a^{3} - \frac{221}{60480}\diagdown_a^{4} + \frac{380}{120960}\diagdown_a^{5} \cdots\\
D^{-3} &= a^3\Big(\diagdown_a^{-3} + \frac{3}{2}\diagdown_a^{-2} + \frac{6}{12}\diagdown_a^{-1} + 0 + \frac{3}{720}\diagdown_a - \frac{3}{1440}\diagdown_a^{2} + \frac{64}{60480}\diagdown_a^{3} - \frac{66}{120960}\diagdown_a^{4} \cdots\\
D^{-4} &= a^4\Big(\diagdown_a^{-4} + \frac{4}{2}\diagdown_a^{-3} + \frac{14}{12}\diagdown_a^{-2} + \frac{4}{24}\diagdown_a^{-1} - \frac{1}{720} + 0\,\diagdown_a + \frac{20}{60480}\diagdown_a^{2} - \frac{40}{120960}\diagdown_a^{3} \cdots\\
D^{-5} &= a^5\Big(\diagdown_a^{-5} + \frac{5}{2}\diagdown_a^{-4} + \frac{25}{12}\diagdown_a^{-3} + \frac{15}{24}\diagdown_a^{-2} + \frac{30}{720}\diagdown_a^{-1} + 0 - \frac{10}{60480}\diagdown_a + \frac{10}{120960}\diagdown_a^{2} \cdots
\end{aligned}\right\}(93)$$

Mit Rücksicht auf Genauigkeit fällt ein Vergleich der Formeln (90) für numerische Differentiation und (93) für numerische Integration in hohem Grade zu Gunsten der letzteren aus. Dies beruht darauf, dass die Wurzeln in $b_n = 0, \ldots,$ $h_n = 0$ recht kleine, negative Werte haben. Dadurch wird die Konvergenz der Reihen, insofern sie auf den Koeffizienten der Differenzen beruht, was die Integrationen betrifft, verstärkt, während sie betreffs der Differentiationen geschwächt wird. Daneben wird, wie im § 14, der mittlere Fehler, der von abgerundeten oder beobachteten Tafelnwerten herstammt, für die Integration günstig ausfallen, wo, wie wir für eigentliche Interpolationen sahen, einige Ausgleichung stattfindet; aber auch dieses stellt sich bei der Differentiation ungünstig. Dies beruht zum Teil darauf, dass die Bestimmung eines Differentialquotienten für die eine Grenze des benutzten Intervalles den Charakter einer beginnenden Extrapolation hat; und insofern ist dem abzuhelfen, wenn man sich mit Differentialquotienten die der Mitte des Intervalles nahe fallenden Argumenten entsprechen, begnügen lassen kann.

Man hat also

$$E^{\frac{a}{2}} \circ D = a^{-1}\left(\diagdown_a - \frac{1}{24}\diagdown_a^3 + \frac{1}{24}\diagdown_a^4 - \frac{71}{1920}\diagdown_a^5 + \frac{31}{960}\diagdown_a^6 - \frac{3043}{107520}\diagdown_a^7 + \frac{2689}{107520}\diagdown_a^8 - \ldots\right) \quad (94)$$

und

$$E^a \circ D = a^{-1}\left(\diagdown_a + \frac{1}{2}\diagdown_a^2 - \frac{1}{6}\diagdown_a^3 + \frac{1}{12}\diagdown_a^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(n-1)\,n}\diagdown_a^n + \ldots\right) \quad (95)$$

der Vergrösserung des Argumentes mit einem halben und mit einem ganzen Argument-Intervall entsprechend, und für den zweiten Differentialquotienten zum nächstfolgenden Argument

$$E^a \circ D^2 = a^{-2}\left(\diagdown_a^2 - \frac{1}{12}\diagdown_a^4 + \frac{1}{12}\diagdown_a^5 - \frac{13}{180}\diagdown_a^6 + \frac{11}{180}\diagdown_a^7 - \frac{29}{560}\diagdown_a^8 + \frac{223}{5040}\diagdown_a^9 - \ldots \right. \quad (96)$$

Selbst mit diesen konvergenteren Reihen ist und bleibt doch numerische Differentiation ein bedenklicher Prozess, wenn von approximativer Rechnung die Rede ist; nimmt man viele Glieder der Reihen in Betracht, wächst der mittlere Fehler beunruhigend stark, und verkleinert man das Intervall, um sich mit wenigeren Gliedern begnügen zu können, werden die Differentialquotienten Brüche mit kleineren Zählern und Nennern.

Es liegt kein Grund dazu vor, auch die Formeln für Differenzen auf aufsteigender Schräglinie niederzuschreiben. Die Koeffizienten in den Reihen sind numerisch dieselben wie hier. Der Unterschied ist nur, dass $\diagdown_a$ durch $-\!\diagup_a$ ersetzt wird, indem gleichzeitig $-a$ für a gelesen wird. Man kann sich dies durch die Operation veranschaulichen, dass man ein Spiegelbild der Tafel bildet, wo man sich die spiegelnde Fläche durch den Nullpunkt der Argumente gelegt denkt; es ist jedoch unnötig, ein besonderes Symbol für diese Operation einzuführen.

Beispiel. Bilde Differentialquotienten und Integrale für die Funktion x^4 unter Anwendung der Tafel pg. 10 für die Argumente 0, 1 ... 10!

§ 26.

Viel wichtiger und besser als die in dem Vorigen angegebenen Formeln sind solche, die bei Interpolation, Differentiation und Integration Differenzen $\triangle^n$ auf der Linie des Argumentes benutzen. Man kann nun auch alle diese Differenzen als durch die Tafel gegeben betrachten; die Bedingung ist aber, dass die $E^{\frac{1}{2}}$ eben so unmittelbar als die E gegeben sind. Das Intervall der vorgelegten äquidistanten Tafel muss desshalb als die Hälfte von dem aufgefasst werden, wonach die Differenzen unter beständigem Überspringen eines Wertes gebildet werden.

Das Schema dafür wird

$$\begin{array}{llllll}
0 & 1\,, & \triangle = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\,, & \triangle^2 = \triangle E^{\frac{1}{2}} - \triangle E^{-\frac{1}{2}}\,, & \triangle^3 = \triangle^2 E^{\frac{1}{2}} - \triangle^2 E^{-\frac{1}{2}} \\
0{\cdot}5 & E^{\frac{1}{2}}\,, & \triangle E^{\frac{1}{2}} = E - 1\,, & \triangle^2 E^{\frac{1}{2}} = \triangle E - \triangle\,, & \triangle^3 E^{\frac{1}{2}} = \triangle^2 E - \triangle^2 \\
1 & E\,, & \triangle E = E^{\frac{3}{2}} - E^{\frac{1}{2}}\,, & \triangle^2 E = \triangle E^{\frac{3}{2}} - \triangle E^{\frac{1}{2}}\,, & \triangle^3 E = \triangle^2 E^{\frac{3}{2}} - \triangle^2 E^{\frac{1}{2}} \\
1{\cdot}5 & E^{\frac{3}{2}}\,, & \triangle E^{\frac{3}{2}} = E^2 - E\,, & \triangle^2 E^{\frac{3}{2}} = \triangle E^2 - \triangle E\,, & \triangle^3 E^{\frac{3}{2}} = \triangle^2 E^2 - \triangle^2 E \\
2 & E^2\,, & \triangle E^2 = E^{\frac{5}{2}} - E^{\frac{3}{2}}\,, & \triangle^2 E^2 = \triangle E^{\frac{5}{2}} - \triangle E^{\frac{3}{2}}\,, & \triangle^3 E^2 = \triangle^2 E^{\frac{5}{2}} - \triangle^2 E^{\frac{3}{2}}
\end{array}$$

Die Grundformel für die symbolische Ableitung von Formeln mit Differenzen auf der Zeile des Argumentes ist:

$$\triangle = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\,, \tag{97}$$

die rücksichtlich E aufgelöst giebt

$$E^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{4}\triangle^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\triangle}{2}\,.$$

Für Interpolation hat man also

$$E^a = \left(\left(1 + \frac{1}{4}\triangle^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\triangle}{2}\right)^{2a} \tag{98}$$

in Reihe nach Potenzen von $\triangle$ zu entwickeln, was doch am leichtesten auf die im folgenden § besprochene Weise geschieht. Das Resultat ist

$$\left.\begin{aligned}
E^a = 1 + \frac{a^2}{1\cdot 2}\left(\triangle^2 + \frac{a^2-1}{3\cdot 4}\left(\triangle^4 + \frac{a^2-4}{5\cdot 6}\left(\triangle^6 + \ldots + \frac{a^2-n^2}{(2n+1)(2n+2)}\left(\triangle^{2n+2} + \ldots\right)\right)\right)\right) + \\
+ \frac{2a}{2}\left(\triangle + \frac{4a^2-1}{4\cdot 6}\left(\triangle^3 + \frac{4a^2-9}{8\cdot 10}\left(\triangle^5 + \ldots + \frac{4a^2-(2n-1)^2}{4n(4n+2)}\left(\triangle^{2n+1} + \ldots\right)\right)\right)\right).
\end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Die Interpolation nach dieser Formel ist wirklich gut, wenn auch nicht die unbedingt bequemste. Ist man seiner Sache nicht gewiss, dass eine Tafel auf

gebührende Weise konstruirt ist, kann man bei der Anwendung dieser Interpolationsformeln einer eigentümlichen Gefahr ausgesetzt sein. Hätte man einen systematischen konstanten Fehler bei der Berechnung jedes zweiten der Werte der Tafel begangen, würde man es nicht immer den Differenzen ansehen können, die bei dieser Methode benutzt werden müssen. Man muss die Tafel ausserdem noch nach der Formel

$$E^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\triangle + \frac{1}{8}\left(\triangle^2 - \frac{1}{16}\left(\triangle^4 - \frac{1}{8}\left(\triangle^6 - \frac{5}{32}\left(\triangle^8 - \ldots - \frac{2n-3}{8n}\left(\triangle^{2n} - \ldots\right)\right)\right)\right)\right) \quad (100)$$

prüfen.

Beispiel. Welches Resultat würde z. B. eine unkritische Interpolation der Tafel:

Argument	Funktion	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$	$\triangle^4$
0	0	0	2	0	24
0·5	0	1	5	12	24
1	1	5	14	24	24
1·5	5	15	29	36	24
2	16	34	50	48	24
2·5	39	65	77	60	24
3	81	111	110	72	24

geben?

Die Formeln für Differentiation und Integration können von (99) durch Anwendung der Stirlingschen Zahlen $\overset{m}{III}(p)$ und $\overset{m}{V}(p)$ auf die Koeffizienten abgeleitet werden. Wir werden diese sowie auch noch andere im folgenden Paragraphen kennen lernen.

§ 27.

Wenn die Differenzen einer Tafel nicht wie im vorigen § durch Überspringen eines dazwischen liegenden Wertes, sondern ganz einfach durch die Subtraktion von aufeinander folgenden Werten berechnet werden, finden wir auf der Zeile mit jedem der Argumente der Tafel nur Differenzen gerader Ordnung; in der Mitte jedes Intervalls sind dagegen alle Differenzen ungerader Ordnung gegeben. Auf keiner dieser Zeilen ist damit für eine Interpolation hinlängliches gegeben. Das fehlende kann jedoch wie im § 13 (23)—(27) durch Anwendung des Symboles der Mittelzahl $\square = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)$ herbeigeschafft werden. Bei symbolischer Bezeichnung ist das gegebene dann entweder

$$1,\ \square\triangle,\ \triangle^2,\ \square\triangle^3,\ \triangle^4,\ \ldots\ \square\triangle^{2n-1},\ \triangle^{2n}$$

oder

$$\square,\ \triangle,\ \square\triangle^2,\ \triangle^3,\ \square\triangle^4,\ \ldots\ \triangle^{2n-1},\ \square\triangle^{2n}.$$

Um grössere Geschmeidigkeit zu erreichen und der Irrationalität zu entgehen, die uns im vorigen § belästigte, führen wir trigonometrische Funktionen von Symbolen mit ihrem aus der Zahlenlehre bekannten Reichtum an Formeln und Reihenentwickelungen ein.

Da
$$1 = \square_a^2 - \frac{1}{4}\triangle_a^2, \tag{101}$$
(§ 24, Beispiel 5) können wir $\square_a$ als Cosinus, $\frac{\triangle_a}{2i}$ als Sinus eines imaginären Symboles auffassen, nämlich
$$\square_a = \cos\frac{aD}{2i} \quad \text{und} \quad \frac{\triangle_a}{2i} = \sin\frac{aD}{2i}, \tag{102}$$
denn dadurch wird
$$\square_a = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}aD} + e^{-\frac{1}{2}aD}\right) = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{a}{2}} + E^{-\frac{a}{2}}\right) \tag{103}$$
und
$$\triangle_a = e^{\frac{1}{2}aD} - e^{-\frac{1}{2}aD} = E^{\frac{a}{2}} - E^{-\frac{a}{2}}. \tag{104}$$

Umgekehrt wird
$$\left.\begin{aligned} E^{\frac{a}{2}} &= \square_a + \frac{1}{2}\triangle_a = \cos\frac{aD}{2i} + i\sin\frac{aD}{2i} = e^{\frac{aD}{2}} \\ \text{und}\quad E^{-\frac{a}{2}} &= \square_a - \frac{1}{2}\triangle_a = \cos\frac{aD}{2i} - i\sin\frac{aD}{2i} = e^{-\frac{aD}{2}}. \end{aligned}\right| \tag{105}$$

Setzt man hier das Intervall $a = 1$, entsteht
$$\square = \cos\frac{D}{2i} \quad \text{und} \quad \frac{\triangle}{2i} = \sin\frac{D}{2i}, \tag{106}$$
welche die Grundfaktoren in unseren gegebenen Symbolen sind; und für die unbekannten giebt uns $a = 2v$ das Interpolationssymbol E^v als die Summe von $\square_{2v}$ und $\frac{1}{2}\triangle_{2v}$
$$E^v = \square_{2v} + \frac{1}{2}\triangle_{2v} = \cos\frac{vD}{i} + i\sin\frac{vD}{i}. \tag{107}$$

Die Interpolationsaufgabe löst man also mittelst der Reihen für cos. und sin. für multiplizirte Winkel, (58), (59), (60) und (61), die wir in dem ersten Abschnitt bei der Behandlung der Exponentialfunktion, eben durch Interpolation, auf der Zeile des Argumentes fanden.

Setzt man nun in (58) und (59) $k = \frac{D}{i}$ ein, wodurch $\sin\frac{k}{2} = \frac{\triangle}{2i}$, $\cos\frac{k}{2} = \square$ wird, und schreibt man v für x, erhält man
$$\cos\frac{vD}{i} = \square_{2v} = 1 + \frac{v^2}{1\cdot 2}\left(\triangle^2 + \frac{v^2-1}{3\cdot 4}\left(\triangle^4 + \frac{v^2-4}{5\,.\,6}\left(\triangle^6 + \ldots + \frac{v^2-n^2}{(2n+1)(2n+2)}\left(\triangle^{2n+2} + \ldots\right)\right)\right)\right) \tag{108}$$
$$\sin\frac{vD}{i} = \triangle_{2v} = 2v\square\left(\triangle + \frac{v^2-1}{2\,.\,3}\left(\triangle^3 + \frac{v^2-4}{4\cdot 5}\left(\triangle^5 + \ldots + \frac{v^2-n^2}{2n(2n+1)}\left(\triangle^{2n+1} + \ldots\right)\right)\right)\right) \tag{109}$$
und (60) und (61) geben ebenfalls mit v für x
$$\square_{2v} = \square\left(1 + \frac{4v^2-1}{2\,.\,4}\left(\triangle^2 + \frac{4v^2-9}{6\,.\,8}\left(\triangle^4 + \ldots + \frac{4v^2-(2n-1)^2}{(4n-2)4n}\left(\triangle^{2n} + \ldots\right)\right)\right)\right) \tag{110}$$
$$\triangle_{2v} = 2v\left(\triangle + \frac{4v^2-1}{4\,.\,6}\left(\triangle^3 + \frac{4v^2-9}{8\,.\,10}\left(\triangle^5 + \ldots + \frac{4v^2-(2n-1)^2}{4n(4n+2)}\left(\triangle^{2n+1} + \ldots\right)\right)\right)\right) \tag{111}$$

Hieraus kann man nun nach $E^v = \square_{2v} + \frac{1}{2}\triangle_{2v}$ Interpolationsformeln nach dem kombiniren, was im vorliegenden Falle gegebene Symbole sind. $(108) + \frac{1}{2}(109)$ giebt die Formel (26) wieder

$$\left.\begin{aligned} E^v = 1 + \frac{v^2}{1\cdot 2}\left(\triangle^2 + \frac{v^2-1}{3\cdot 4}\left(\triangle^4 + \frac{v^2-4}{5\cdot 6}\left(\triangle^6 + \ldots\right)\right)\right) + \\ + v\square\left(\triangle + \frac{v^2-1}{2\cdot 3}\left(\triangle^3 + \frac{v^2-4}{4\cdot 5}\left(\triangle^5 + \ldots\right)\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad (26\,\mathrm{a})$$

und $(110) + \frac{1}{2}(111)$ die Formel (27)

$$\left.\begin{aligned} E^v = \square\left(1 + \frac{4v^2-1}{2\cdot 4}\left(\triangle^2 + \frac{4v^2-9}{6\cdot 8}\left(\triangle^4 + \frac{4v^2-25}{10.12}\left(\triangle^6 + \ldots\right)\right)\right)\right) + \\ + v\left(\triangle + \frac{4v^2-1}{4\cdot 6}\left(\triangle^3 + \frac{4v^2-9}{8\cdot 10}\left(\triangle^5 + \frac{4v^2-25}{12\cdot 14}\left(\triangle^7 + \ldots\right)\right)\right)\right). \end{aligned}\right\} \quad (27\,\mathrm{a})$$

Die Kombination $(108) + \frac{1}{2}(111)$ führt uns zu (99) und setzt Differenzen voraus, die in der besonderen Weise «mit Überspringen» gebildet sind. Man hat also durch die symbolische Rechnung nichts neues, nur eine etwas kürzere, bei passender Einübung bequeme Form für diese wichtigen Rechenregeln gewonnen.

In dieser Beziehung ist es besonders die Gleichung (111), die uns als Mittel, die Differenzen einer Tafel mit verändertem Intervall zwischen den Argumenten zu finden, interessirt. Durch symbolische Potenziation derselben erhalten wir

$$\triangle_x^n = (x\triangle)^n\left\{1 + \frac{x^2-1}{24}\left(\triangle^2 + \frac{x^2-9}{80}\left(\triangle^4 + \frac{x^2-25}{168}\left(\triangle^6 + \frac{x^2-49}{288}\left(\triangle^8 + \ldots\right)\right)\right)\right)\right\}^n \quad (112)$$

für sämtliche Differenzen einer Tafel, wo das Intervall mit einem willkürlichen Faktor x multiplizirt ist.

§ 28.

Eine der gewöhnlichsten Aufgaben der Interpolationsrechnung ist die, eine Tafel in der Weise umzuformen, dass das konstante Intervall der Argumente verändert wird; von besonderer Wichtigkeit wird es sein, das «Intervall teilen» zu können in eine Anzahl m Teile, so dass die ursprüngliche Tafel in jedes Intervall $m - 1$ Funktionswerte eingeschaltet bekommt. Diese Teilung des Intervalles kann nun zwar dadurch ausgeführt werden, dass man für jedes der neuen Argumente einzeln interpolirt; dies muss man tun, wenn nahe am Anfang oder am Schluss einer begrenzten Tafel interpolirt werden muss (siehe § 25 (86), (87) und (88)); mit grossen Tafeln aber und, wo das Intervall in viele Teile (die Logarithmentafel Brigg's wurde in 1000 Teile geteilt) geteilt werden muss, wird diese Interpolation sowohl mühsam als auch so unsicher, dass sogar eine Differenzprobe der neuen Tafel immer höchst notwendig, und doch nicht immer völlig genügend sein wird.

Durch die Gleichung (112) kann man für jede der Differenzen der ursprünglichen Tafel die Differenz berechnen, die nach der Veränderung des Intervalles auf dem entsprechenden Platze in der neuen Tafel stehen soll. Wenn das Intervall in eine ungerade Anzahl Teile geteilt werden soll, werden die neuen Differenzen hierdurch solche Plätze bekommen, dass man aus ihnen durch einfache Summationen der Differenzen höherer Ordnung die fehlenden der nächst niedrigeren Ordnung suppliren kann. Die Richtigkeit der Rechnung kontrollirt man da, wo die beiden Summationen von unten und von oben sich begegnen; zuletzt kann man, ebenfalls durch Summation, die neuen Funktionswerte mit der definitiven, einer Differenzprobe entsprechenden Kontrolle bestimmen. Besonders einfach ist z. B. die Fünfteilung für eine Funktion des 2ten Grades, indem man nur $\frac{1}{5}$ der ersten Differenz bildet und sie mit $\frac{1}{25}$ der zweiten Differenz ergänzt.

Folgendes Beispiel, wo die Werte der ursprünglich gegebenen Tafel durch kursiven Druck hervorgehoben sind, wird dies erläutern:

0	*11*		*14*
		37	
1	48		
		51	
2	99		
		65	
3	164		
		79	
4	243		
		93	
5	*336*		*14*
		107	
6	443		
		121	
7	564		
		135	
8	699		
		149	
9	848		
		163	
10	*1011*		*14*
		177	
11	1188		
		191	
12	1379		
		205	
13	1584		
		219	
14	1803		
		233	
15	*2036*		*14*
		247	
16	2283		
		261	
17	2544		
		275	
18	2819		
		289	
19	3108		
		303	
20	*3411*		*14*

Wenn die Anzahl der Intervallteile m eine gerade Zahl ist, kann man sich mit der Veränderung der Differenzen und der Ergänzung der Tafel nicht begnügen, da die Differenzen, die von ungerader Ordnung gebildet werden, dann nicht Diffe-

renzen der neuen Tafel sind; man kann aber zur Bildung der Mittel-Differenzen der ungeraden Ordnungen in der neuen Tafel (109) und (110) benutzen, und da

$$E^{\pm\frac{1}{2}}\triangle^{r} = \square\triangle^{r} \pm \frac{1}{2}\triangle^{r+1}$$

können Summationen von ganzen und von halben Differenzen auch hier zum Ziele führen.

Zum Beispiel die Halbirung des Intervalles für eine Funktion des dritten Grades

0	*13*		*14*	
		23		
1	36	*45*	44	*30*
		67		
2	*103*		*74*	
		141		
3	244	*193*	104	*30*
		245		
4	*489*		*134*	
		379		
5	868	*461*	164	*30*
		543		
6	*1411*		*194*	

In diesen Beispielen ist das Verfahren äusserst bequem, weil die Formel (111) und ebenfalls (109) sich hier auf ihr erstes Glied beschränkt, und die neuen Differenzen entstehen deshalb durch einfache Divisionen der alten. Will man mit Rücksicht auf höhere Ordnungen der Differenzen interpoliren, und soll für Funktionen des dritten Grades das Intervall in mehr als zwei Teile geteilt werden, ist die Rechnung etwas komplizirter; aber auch da muss man sie beständig mit der Division der alten Differenzen durch die Potenzen der Teilungszahl einleiten, und die Quotienten muss man nur mit Bezug auf (111) und (109) korrigiren, ehe die Summationen ausgeführt werden. Man kan zwar diese Intervallteilungen einfach dadurch ausführen, dass man in (111) und (112) $2v = x = \frac{1}{m}$ setzt; es ist aber vorteilhafter statt dessen **Briggs Verfahren** anzuwenden. Schon er sah nämlich ein, dass man hier — was auch in vielen anderen Fällen gilt (siehe § 10 und § 11) — Vorteil daraus zieht, die explizite Form der Arbeitsgleichungen aufzugeben und lieber die entgegengesetzte Form anzuwenden, wo eine gleich grosse Anzahl bekannter Zahlen durch die unbekannten ausgedrückt werden. Die Bedingung ist, dass alle unbekannten berechnet werden sollen, und dass die ganze Eliminationsarbeit dadurch vermieden wird, dass eine Gleichung nur eine unbekannte enthält, eine andere diese und noch eine, und ferner jede Gleichung nur eine unbekannte ausser denjenigen, die in die im Voraus aufgestellten eingehen und also nach und nach durch diese berechnet werden können. Nach Briggs Methode bilden wir also, um die erwähnten Korrek-

tionen auszuführen, ein System von Arbeitsgleichungen nach der Formel (112) mit Hinzufügung von (109), wenn m gerade ist, indem wir $2v = x = m$ setzen, also eben die Anzahl der Teile des Intervalles. Für Teilungen bis in 13 Teile erhalten wir also für die beiden ersten Ordnungen die folgenden Arbeitsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}\triangle_2 = \triangle\square & (\frac{1}{2}\triangle_2)^2 = \triangle^2 + \frac{1}{4}\triangle^4 \\
\frac{1}{3}\triangle_3 = \triangle + \frac{1}{3}\triangle^3 & (\frac{1}{3}\triangle_3)^2 = \triangle^2 + \frac{2}{3}\triangle^4 + \frac{1}{9}\triangle^6 \\
\frac{1}{4}\triangle_4 = \square(\triangle + \frac{1}{2}\triangle^3) & (\frac{1}{4}\triangle_4)^2 = \triangle^2 + \frac{5}{4}\triangle^4 + \frac{1}{2}\triangle^6 + \frac{1}{16}\triangle^8 \\
\frac{1}{5}\triangle_5 = \triangle + \triangle^3 + \frac{1}{5}\triangle^5 & (\frac{1}{5}\triangle_5)^2 = \triangle^2 + 2\triangle^4 + \frac{7}{5}\triangle^6 + \frac{2}{5}\triangle^8 + \frac{1}{25}\triangle^{10} \\
\frac{1}{6}\triangle_6 = \square(\triangle + \frac{4}{3}\triangle^3 + \frac{1}{3}\triangle^5) & (\frac{1}{6}\triangle_6)^2 = \triangle^2 + \frac{35}{12}\triangle^4 + \frac{28}{9}\triangle^6 + \ldots \\
\frac{1}{7}\triangle_7 = \triangle + 2\triangle^3 + \triangle^5 + \frac{1}{7}\triangle^7 & (\frac{1}{7}\triangle_7)^2 = \triangle^2 + 4\triangle^4 + 6\triangle^6 + \ldots \\
\frac{1}{8}\triangle_8 = \square(\triangle + \frac{5}{2}\triangle^3 + \frac{3}{2}\triangle^5 + \frac{1}{4}\triangle^7) & (\frac{1}{8}\triangle_8)^2 = \triangle^2 + \frac{21}{4}\triangle^4 + \frac{21}{2}\triangle^6 + \ldots \\
\frac{1}{9}\triangle_9 = \triangle + \frac{10}{3}\triangle^3 + 3\triangle^5 + \ldots & (\frac{1}{9}\triangle_9)^2 = \triangle^2 + \frac{20}{3}\triangle^4 + \frac{154}{9}\triangle^6 + \ldots \\
\frac{1}{10}\triangle_{10} = \square(\triangle + 4\triangle^3 + \frac{21}{5}\triangle^5 + \ldots) & (\frac{1}{10}\triangle_{10})^2 = \triangle^2 + \frac{33}{4}\triangle^4 + \frac{132}{5}\triangle^6 + \ldots \\
\frac{1}{11}\triangle_{11} = \triangle + 5\triangle^3 + 7\triangle^5 + \ldots & (\frac{1}{11}\triangle_{11})^2 = \triangle^2 + 10\triangle^4 + 39\triangle^6 + \ldots \\
\frac{1}{12}\triangle_{12} = \square(\triangle + \frac{35}{6}\triangle^3 + \frac{28}{3}\triangle^5 + \ldots) & (\frac{1}{12}\triangle_{12})^2 = \triangle^2 + \frac{143}{12}\triangle^4 + \frac{1001}{18}\triangle^6 + \ldots \\
\frac{1}{13}\triangle_{13} = \triangle + 7\triangle^3 + 14\triangle^5 + \ldots & (\frac{1}{13}\triangle_{13})^2 = \triangle^2 + 14\triangle^4 + 77\triangle^6 + \ldots
\end{array}\right\} \quad (115)$$

Aus diesen kann man für jedes m durch symbolische Multiplikation, (112) entsprechend, die Arbeitsgleichungen für die Differenzen von höherer Ordnung leicht berechnen, bis man die Ordnung r erreicht, mit der $(\frac{1}{m}\triangle_m)^r$ und deshalb auch $\triangle^r$ verschwindet. Alle diese Reihen sind endlich, um so mehr als sie nur bis zur Verschwindungsgrenze fortgesetzt werden sollen, wo in den beiden höchsten Ordnungen, ohne Korrektion, die bekannten $(\frac{1}{m}\triangle_m)^r$ den gesuchten $\triangle^r$ gleich sind. Man wird bemerken, dass die Koeffizienten für das Rechnen sehr bequem sind, insbesondere wenn es gilt, das Intervall in eine primische Anzahl Teile zu teilen, und hiermit können ja auch die sämtlichen anderen Fälle erschöpft werden.

Ist z. B. die Ausführung einer Teilung in dreizehn Teile erforderlich, und will man nur von Differenzen von höchstens 6^{ter} Ordnung Gebrauch machen, wird man aus den beiden niedrigsten Formeln in (115) ferner sehen, dass

$$\begin{aligned}
(\tfrac{1}{13}\triangle_{13})^3 &= \triangle^3 + 21\triangle^5 \ldots \\
(\tfrac{1}{13}\triangle_{13})^4 &= \triangle^4 + 28\triangle^6 \ldots \\
(\tfrac{1}{13}\triangle_{13})^5 &= \triangle^5 + \ldots \\
(\tfrac{1}{13}\triangle_{13})^6 &= \triangle^6 + \ldots
\end{aligned}$$

ist. Wenn man also unter $\triangle_{13}$ die ersten Differenzen der ursprünglichen Tafel versteht, diese mit 13 dividirt und durch abwechselnde Subtraktionen und Divisionen mit 13 die linken Seiten dieser Gleichungen berechnet hat, wird man in den beiden

höchsten Ordnungen $\triangle^5$ und $\triangle^6$ unmittelbar die Differenzen für die neue Tafel bestimmt haben; $\triangle^4$ und $\triangle^3$ müssen durch Subtraktion eines einzelnen Gliedes korrigirt werden; die beiden ersten, $\triangle$ und $\triangle^2$, müssen mit zwei Gliedern korrigirt werden. Dadurch findet man die sämtlichen Differenzen $\triangle$, $\triangle^2$, $\triangle^3$, $\triangle^4$, $\triangle^5$, $\triangle^6$. Da man die höchste (die 6te) Differenz als konstant betrachten kann, wird man auch ihre sämtlichen 12 Werte in jedes Intervall unmittelbar hinschreiben können. Durch successive Addition von 6 dieser Differenzen zu der gefundenen $\triangle^5$ auf deren einer Seite und durch Subtraktion von anderen 6 Differenzen auf deren anderer Seite ergänzt man die Spalte für $\triangle^5$. In derselben Weise kann man jetzt die Spalten für $\triangle^4$, $\triangle^3$, $\triangle^2$, $\triangle^1$ und schliesslich für die Funktionswerte ergänzen. Von den Kontrollen, die sich in jedem Intervalle für jede neugebildete Reihe von Differenzen darbieten, kann man wegen der zahlreichen Addenden und wegen der Grösse der Korrektionsfaktoren nicht erwarten, dass sie auf ganz wenige Einheiten der letzten Dezimale stimmen. Um das endliche Resultat genau zu erhalten, ist es jedoch nicht notwendig, dass man während der sämtlichen Divisionen der ursprünglichen Differenzen durch die konstante Teilungszahl die volle Anzahl von bedeutenden Ziffern behält; im Falle der Dreizehnteilung wird es reichlich sein, wenn für jede Ordnung von den mit 13 dividirten Differenzen eine Dezimale mehr hinzugefügt wird, als man bei der vorigen Ordnung mitnahm.

Für die wichtigsten Fälle und besonders für die Fünfteilung des Intervalles von Briggs sollen hier die Tafeln in grösserer Ausführlichkeit und mit einzelnen besonderen Bemerkungen gegeben werden.

Zur Halbirung des Intervalles dient

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\triangle_2 &= \Box\triangle \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^2 &= \triangle^2 + \tfrac{1}{4}\triangle^4 \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^3 &= \Box\triangle^3 + \tfrac{1}{4}\Box\triangle^5 \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^4 &= \triangle^4 + \tfrac{1}{2}\triangle^6 + \tfrac{1}{16}\triangle^8 \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^5 &= \Box\triangle^5 + \tfrac{1}{2}\Box\triangle^7 + \tfrac{1}{16}\Box\triangle^9 \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^6 &= \triangle^6 + \tfrac{3}{4}\triangle^8 + \tfrac{3}{16}\triangle^{10} + \tfrac{1}{64}\triangle^{12} \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^7 &= \Box\triangle^7 + \tfrac{3}{4}\Box\triangle^9 + \tfrac{3}{16}\Box\triangle^{11} + \tfrac{1}{64}\Box\triangle^{13} \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^8 &= \triangle^8 + \triangle^{10} + \tfrac{3}{8}\triangle^{12} + \dots \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^9 &= \Box\triangle^9 + \Box\triangle^{11} + \tfrac{3}{8}\Box\triangle^{13} + \dots \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^{10} &= \triangle^{10} + \tfrac{5}{4}\triangle^{12} + \dots \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^{11} &= \Box\triangle^{11} + \tfrac{5}{4}\Box\triangle^{13} + \dots \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^{12} &= \triangle^{12} + \dots \\
(\tfrac{1}{2}\triangle_2)^{13} &= \Box\triangle^{13} + \dots
\end{aligned}\right\} \quad (116)$$

Weil die geraden Differenzen und die ungeraden Mitteldifferenzen der nächst höheren Ordnung dieselben Zahlfaktoren haben, muss man genau darauf achten, ob die höchste Differenz von gerader oder von ungerader Ordnung ist, um demnach ihre Ergänzungszahlen auf die Plätze zu schreiben, die in der werdenden Tafel auszufüllen sind. Danach wird es sich von selbst ergeben, wo man in den folgenden Ergänzungen die Hälfte der auf der Zeile stehenden höheren Differenz addiren und subtrahiren muss, und wo man die volle Differenz addiren und subtrahiren und durch beiderseitige Übereinstimmung prüfen muss. Hat man durch Berechnung von $\frac{\Delta_2}{2}$ und wohl auch von $\left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^7$ u. s. w. die Anzahl der Dezimalen mit einer Einheit vergrössert, wird dies genügen, da man hier wegen der kleinen Korrektions-faktoren und der wenigen Additionen nicht viel an Genauigkeit verliert. Ungefähr ebenso leicht und sicher kann man jedoch die Halbirung des Intervalles ausführen, wenn man überall in der Tafel nach

$$1 = \square \circ \left\{1 - \frac{1}{8}\left(\Delta^2 - \frac{3}{16}\left(\Delta^4 - \frac{5}{24}\left(\Delta^6 - \frac{7}{32}\left(\Delta^8 - \ldots - \frac{2n-1}{8n}\left(\Delta^{2n}\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right\}$$

vergl. (28), (51)) in der Mitte interpolirt.

Zur Dreiteilung des Intervalles dient

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}\Delta_3 &= \Delta + \tfrac{1}{3}\Delta^3\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^2 &= \Delta^2 + \tfrac{2}{3}\Delta^4 + \tfrac{1}{9}\Delta^6\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^3 &= \Delta^3 + \Delta^5 + \tfrac{1}{3}\Delta^7 + \tfrac{1}{27}\Delta^9\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^4 &= \Delta^4 + \tfrac{4}{3}\Delta^6 + \tfrac{2}{3}\Delta^8 + \tfrac{4}{27}\Delta^{10} + \tfrac{1}{81}\Delta^{12}\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^5 &= \Delta^5 + \tfrac{5}{3}\Delta^7 + \tfrac{10}{9}\Delta^9 + \tfrac{10}{27}\Delta^{11} + \tfrac{5}{81}\Delta^{13} + \ldots\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^6 &= \Delta^6 + 2\Delta^8 + \tfrac{5}{3}\Delta^{10} + \tfrac{20}{27}\Delta^{12} + \ldots\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^7 &= \Delta^7 + \tfrac{7}{3}\Delta^9 + \tfrac{7}{3}\Delta^{11} + \tfrac{35}{27}\Delta^{13} + \ldots\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^8 &= \Delta^8 + \tfrac{8}{3}\Delta^{10} + \tfrac{28}{9}\Delta^{12} + \ldots\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^9 &= \Delta^9 + 3\Delta^{11} + 4\Delta^{13} + \ldots\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^{10} &= \Delta^{10} + \tfrac{10}{3}\Delta^{12} + \ldots\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^{11} &= \Delta^{11} + \tfrac{11}{3}\Delta^{13} + \ldots\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^{12} &= \Delta^{12} + \ldots\\
(\tfrac{1}{3}\Delta_3)^{13} &= \Delta^{13} + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

Bei der Berechnung von $\frac{\Delta_3}{3}$, $\left(\frac{\Delta_3}{3}\right)^5$, $\left(\frac{\Delta_3}{3}\right)^9$, $\left(\frac{\Delta_3}{3}\right)^{13}$ muss man jedesmal eine Dezimale mehr hinzufügen.

Zur Vierteilung des Intervalles dient:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{1}{4}\Delta_4 & = \square\Delta + \frac{1}{2}\square\Delta^3 \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^2 & = \Delta^2 + \frac{5}{4}\Delta^4 + \frac{1}{2}\Delta^6 + \frac{1}{16}\Delta^8 \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^3 & = \square\Delta^3 + \frac{7}{4}\square\Delta^5 + \frac{9}{8}\square\Delta^7 + \frac{5}{16}\square\Delta^9 + \frac{1}{32}\square\Delta^{11} \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^4 & = \Delta^4 + \frac{5}{2}\Delta^6 + \frac{41}{16}\Delta^8 + \frac{11}{8}\Delta^{10} + \frac{13}{32}\Delta^{12} + \ldots \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^5 & = \square\Delta^5 + 3\square\Delta^7 + \frac{61}{16}\square\Delta^9 \, \frac{85}{32}\square\Delta^{11} + \ldots \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^6 & = \Delta^6 + \frac{15}{4}\Delta^8 + \frac{99}{16}\Delta^{10} + \frac{377}{64}\Delta^{12} + \ldots \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^7 & = \square\Delta^7 + \frac{17}{4}\square\Delta^9 + \frac{129}{16}\square\Delta^{11} + \ldots \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^8 & = \Delta^8 + 5\Delta^{10} + \frac{91}{8}\Delta^{12} + \ldots \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^9 & = \square\Delta^9 + \frac{11}{2}\square\Delta^{11} + \ldots \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^{10} & = \Delta^{10} + \frac{25}{4}\Delta^{12} + \ldots \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^{11} & = \square\Delta^{11} + \ldots \\
(\frac{1}{4}\Delta_4)^{12} & = \Delta^{12} + \ldots
\end{array}\right\} \quad (118)$$

Hat man mit Bezug auf Differenzen hoher Ordnung zu interpoliren, wird man es hier und bei anderen Teilungen mit geraden Zahlen vorziehen, das Intervall im Anfange der Rechnung einmal oder mehrmals zu halbiren, um sich mit der geringsten Mühe der Differenzen der höchsten Ordnungen zu entledigen.

Bei der Berechnung von $\frac{\Delta_4}{4}$, $\left(\frac{\Delta_4}{4}\right)^4$, $\left(\frac{\Delta_4}{4}\right)^7 \ldots$, ist die Anzahl der Dezimalen mit einer zu vergrössern.

Zur Fünfteilung des Intervalles dient:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{1}{5}\Delta_5 & = \Delta + \Delta^3 + \frac{1}{5}\Delta^5 \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^2 & = \Delta^2 + 2\Delta^4 + 1{\cdot}4\Delta^6 + 0{\cdot}4\Delta^8 + 0{\cdot}04\Delta^{10} \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^3 & = \Delta^3 + 3\Delta^5 + 3{\cdot}6\Delta^7 + 2{\cdot}2\Delta^9 + 0{\cdot}72\Delta^{11} + 0{\cdot}12\Delta^{13} + 0{\cdot}008\Delta^{15} \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^4 & = \Delta^4 + 4\Delta^6 + 6{\cdot}8\Delta^8 + 6{\cdot}4\Delta^{10} + 3{\cdot}64\Delta^{12} + 1{\cdot}28\Delta^{14} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^5 & = \Delta^5 + 5\Delta^7 + 11\Delta^9 + 14\Delta^{11} + 11{\cdot}4\Delta^{13} + 6{\cdot}20\Delta^{15} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^6 & = \Delta^6 + 6\Delta^8 + 16{\cdot}2\Delta^{10} + 26\Delta^{12} + 27{\cdot}6\Delta^{14} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^7 & = \Delta^7 + 7\Delta^9 + 22{\cdot}4\Delta^{11} + 43{\cdot}4\Delta^{13} + 56{\cdot}84\Delta^{15} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^8 & = \Delta^8 + 8\Delta^{10} + 29{\cdot}6\Delta^{12} + 67{\cdot}2\Delta^{14} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^9 & = \Delta^9 + 9\Delta^{11} + 37{\cdot}8\Delta^{13} + 98{\cdot}4\Delta^{15} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^{10} & = \Delta^{10} + 10\Delta^{12} + 47\Delta^{14} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^{11} & = \Delta^{11} + 11\Delta^{13} + 57{\cdot}2\Delta^{15} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^{12} & = \Delta^{12} + 12\Delta^{14} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^{13} & = \Delta^{13} + 13\Delta^{15} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^{14} & = \Delta^{14} + \ldots \\
(\frac{1}{5}\Delta_5)^{15} & = \Delta^{15} + \ldots
\end{array}\right\} \quad (119)$$

Auch hier habe ich in meiner Praxis gemeint, mir durch die Einführung neuer Dezimalen bei der Berechnung von $\frac{\triangle_5}{5}$, $\left(\frac{\triangle_5}{5}\right)^4$, $\left(\frac{\triangle_5}{5}\right)^7$, $\left(\frac{\triangle_5}{5}\right)^{10}$ und $\left(\frac{\triangle_5}{5}\right)^{13}$ hinlängliche Genauigkeit zu sichern. Eine rationelle Regel lässt sich doch kaum aufstellen; denn jede Abrundung muss den mittleren Fehler der durch die vielen Summationen gefundenen Funktionswerte vergrössern, und das entscheidende ist, dass dieses Steigen durch das Mitnehmen der Differenzen von immer höherer Ordnung in praktischer Beziehung unbedeutend wird. Will man noch sicherer gehen, ist das Mitnehmen noch einer Dezimale in $\left(\frac{\triangle_5}{5}\right)^2$ zu empfehlen.

§ 29.

Infolge (106) $\square = \cos\frac{D}{2i}$ und $\frac{\triangle}{2i} = \sin\frac{D}{2i}$ ist es klar, dass die Reihenentwickelungen für Differenzen und Summen auf der Zeile des Argumentes durch Differentialquotienten und Integrale nach der bekannten Reihe für die Sinus- und Cosinus-Funktion gebaut werden müssen, und dass umgekehrt die Reihen für numerische Differentiation und Integration nach der Arc-sinus-Reihe gebaut werden müssen.

Die symbolischen Formeln hierfür erhalten wir, wenn wir in (109) und (111) $2v = 0$ setzen, also

$$D = \square\left(\triangle - \frac{1}{6}\left(\triangle^3 - \frac{2}{10}\left(\triangle^5 - \frac{3}{14}\left(\triangle^7 - \ldots - \frac{n}{4n+2}\left(\triangle^{2n+1} - \ldots\right.\right.\right.\right.\right. \tag{120}$$

$$D = \triangle - \frac{1}{4\cdot 6}\left(\triangle^3 - \frac{9}{8\cdot 10}\left(\triangle^5 - \ldots - \frac{(2n-1)^2}{4n(4n+2)}\left(\triangle^{2n+1} - \ldots\right.\right.\right. \tag{121}$$

Durch Potenziation von (121) oder, wenn wir in (99) die Ausdrücke durch die Stirlingschen Zahlen $\overset{m}{III}(p)$ und $\overset{m}{V}(p)$ für die Faktoriellen (siehe die Gleichungen (29) und (32)) einsetzen, erhalten wir für die 5 niedrigsten Differentialquotienten und Integrale die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
D &= a^{-1}\left(\triangle_a - \frac{1}{24}\triangle_a^3 + \frac{27}{5760}\triangle_a^5 - \frac{2025}{\langle u\rangle}\triangle_a^7 + \frac{165\,375}{\langle v\rangle}\triangle_a^9 - \frac{8\,037\,225}{\langle w\rangle}\triangle_a^{11} + \ldots\right)\\
D^2 &= a^{-2}\left(\triangle_a^2 - \frac{2}{24}\triangle_a^4 + \frac{64}{5760}\triangle_a^6 - \frac{5184}{\langle u\rangle}\triangle_a^8 + \frac{442\,368}{\langle v\rangle}\triangle_a^{10} - \frac{22\,118\,400}{\langle w\rangle}\triangle_a^{12} + \ldots\right)\\
D^3 &= a^{-3}\left(\triangle_a^3 - \frac{3}{24}\triangle_a^5 + \frac{111}{5760}\triangle_a^7 - \frac{9687}{\langle u\rangle}\triangle_a^9 + \frac{864\,999}{\langle v\rangle}\triangle_a^{11} - \frac{44\,590\,419}{\langle w\rangle}\triangle_a^{13} + \ldots\right)\\
D^4 &= a^{-4}\left(\triangle_a^4 - \frac{4}{24}\triangle_a^6 + \frac{168}{5760}\triangle_a^8 - \frac{15744}{\langle u\rangle}\triangle_a^{10} + \frac{1\,471\,488}{\langle v\rangle}\triangle_a^{12} - \frac{78\,299\,136}{\langle w\rangle}\triangle_a^{14} + \ldots\right)\\
D^5 &= a^{-5}\left(\triangle_a^5 - \frac{5}{24}\triangle_a^7 + \frac{235}{5760}\triangle_a^9 - \frac{23565}{\langle u\rangle}\triangle_a^{11} + \frac{2\,304\,255}{\langle v\rangle}\triangle_a^{13} - \frac{126\,635\,565}{\langle w\rangle}\triangle_a^{15} + \ldots\right)
\end{aligned}\right\} \tag{122}$$

und durch Extrapolation oder Division

$$\left.\begin{aligned}
D^{-1} &= a\left(\Delta_a^{-1}+\frac{1}{24}\Delta_a-\frac{17}{5760}\Delta_a^3+\frac{1101}{\langle u\rangle}\Delta_a^5-\frac{83\,577}{\langle v\rangle}\Delta_a^7+\frac{3\,887\,409}{\langle w\rangle}\Delta_a^9-\dots\right)\\
D^{-2} &= a^2\left(\Delta_a^{-2}+\frac{2}{24}\qquad-\frac{24}{5760}\Delta_a^2+\frac{1488}{\langle u\rangle}\Delta_a^4-\frac{110\,976}{\langle v\rangle}\Delta_a^6+\frac{5\,112\,576}{\langle w\rangle}\Delta_a^8-\dots\right)\\
D^{-3} &= a^3\left(\Delta_a^{-3}+\frac{3}{24}\Delta_a^{-1}-\frac{21}{5760}\Delta_a+\frac{1371}{\langle u\rangle}\Delta_a^3-\frac{103\,617}{\langle v\rangle}\Delta_a^5+\frac{4\,802\,715}{\langle w\rangle}\Delta_a^7-\dots\right)\\
D^{-4} &= a^4\left(\Delta_a^{-4}+\frac{4}{24}\Delta_a^{-2}-\frac{8}{5760}\qquad+\frac{960}{\langle u\rangle}\Delta_a^2-\frac{78\,720}{\langle v\rangle}\Delta_a^4+\frac{3\,770\,880}{\langle w\rangle}\Delta_a^6-\dots\right)\\
D^{-5} &= a^5\left(\Delta_a^{-5}+\frac{5}{24}\Delta_a^{-3}+\frac{15}{5790}\Delta_a^{-1}+\frac{465}{\langle u\rangle}\Delta_a-\frac{49\,305}{\langle v\rangle}\Delta_a^3+\frac{2\,562\,165}{\langle w\rangle}\Delta_a^5-\dots\right)
\end{aligned}\right\}\quad(123)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
\langle u\rangle &= 2\,903\,040\\
\langle v\rangle &= 1\,393\,459\,200\\
\langle w\rangle &= 367\,873\,228\,800.
\end{aligned}\right\}\quad(124)$$

Zur Berechnung von Integralen und Differentialquotienten derjenigen Argumente, für welche die Tafel keine Summen und Differenzen, sondern nur Mittelwerte giebt, kann man durch symbolische Multiplikation von (122) und (123) mit der Identität

$$1=\square\left(1-\frac{1}{8}\left(\Delta^2-\frac{3}{16}\left(\Delta^4-\dots-\frac{2n-1}{8n}\left(\Delta^{2n}-\dots\right)\right)\right)\right)$$

Formeln darstellen.

Dieselben Formeln können noch leichter und sicherer durch eine Interpolationsformel dargestellt werden, welche wie $(110)+\frac{1}{2}(109)$ kombinirt ist, ein übrigens wenig angewandtes Gegenteil von (99), das $E^n=\Sigma p_n\square_a\Delta_a^n$ giebt. Indem man hier die Faktoriellen p_n vermittelst der Stirlingschen Zahlen $\overset{m}{III}_{(p)}$ und $\overset{m}{V}_{(p)}$ durch Potenzen ersetzt, oder auch in anderer Weise, findet man

$$1=\square_a\left(1-\frac{3}{24}\Delta_a^2+\frac{135}{5760}\Delta_a^4-\frac{14\,175}{\langle u\rangle}\Delta_a^6+\frac{1\,488\,375}{\langle v\rangle}\Delta_a^8-\frac{88\,409\,475}{\langle w\rangle}\Delta_a^{10}+\dots\right)\quad(126)$$

$$\left.\begin{aligned}
D &= a^{-1}\square_a\left(\Delta_a-\frac{4}{24}\Delta_a^3+\frac{192}{5760}\Delta_a^5-\frac{20\,736}{\langle u\rangle}\Delta_a^7+\frac{2\,211\,840}{\langle v\rangle}\Delta_a^9-\frac{132\,710\,400}{\langle w\rangle}\Delta_a^{11}+\dots\right)\\
D^2 &= a^{-2}\square_a\left(\Delta_a^2-\frac{5}{24}\Delta_a^4+\frac{259}{5760}\Delta_a^6-\frac{29\,061}{\langle u\rangle}\Delta_a^8+\frac{3\,171\,663}{\langle v\rangle}\Delta_a^{10}-\frac{193\,225\,149}{\langle w\rangle}\Delta_a^{12}+\dots\right)\\
D^3 &= a^{-3}\square_a\left(\Delta_a^3-\frac{6}{24}\Delta_a^5+\frac{336}{5760}\Delta_a^7-\frac{39\,360}{\langle u\rangle}\Delta_a^9+\frac{4\,414\,464}{\langle v\rangle}\Delta_a^{11}-\frac{274\,046\,976}{\langle w\rangle}\Delta_a^{13}+\dots\right)\\
D^4 &= a^{-4}\square_a\left(\Delta_a^4-\frac{7}{24}\Delta_a^6+\frac{423}{5760}\Delta_a^8-\frac{51\,843}{\langle u\rangle}\Delta_a^{10}+\frac{5\,991\,063}{\langle v\rangle}\Delta_a^{12}-\frac{379\,906\,695}{\langle w\rangle}\Delta_a^{14}+\dots\right)\\
D^5 &= a^{-5}\square_a\left(\Delta_a^5-\frac{8}{24}\Delta_a^7+\frac{520}{5760}\Delta_a^9-\frac{66\,720}{\langle u\rangle}\Delta_a^{11}+\frac{7\,956\,480}{\langle v\rangle}\Delta_a^{13}-\frac{516\,218\,880}{\langle w\rangle}\Delta_a^{15}+\dots\right)
\end{aligned}\right\}\quad(127)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
D^{-1} &= a\,\square_a\left(\triangle_a^{-1}-\frac{2}{24}\triangle_a+\frac{88}{5760}\triangle_a^3-\frac{9168}{\langle u\rangle}\triangle_a^5+\frac{958\,848}{\langle v\rangle}\triangle_a^7-\frac{56\,820\,480}{\langle w\rangle}\triangle_a^9+\ldots\right)\\
D^{-2} &= a^2\square_a\left(\triangle_a^{-2}-\frac{1}{24}+\frac{51}{5760}\triangle_a^2-\frac{5505}{\langle u\rangle}\triangle_a^4+\frac{585\,039}{\langle v\rangle}\triangle_a^6-\frac{34\,986\,681}{\langle w\rangle}\triangle_a^8+\ldots\right)\\
D^{-3} &= a^3\square_a\left(\triangle_a^{-3}+\frac{24}{5760}\triangle_a-\frac{2976}{\langle u\rangle}\triangle_a^3+\frac{332\,928}{\langle v\rangle}\triangle_a^5-\frac{20\,450\,304}{\langle w\rangle}\triangle_a^7+\ldots\right)\\
D^{-4} &= a^4\square_a\left(\triangle_a^{-4}+\frac{1}{24}\triangle_a^{-2}+\frac{7}{5760}-\frac{1371}{\langle u\rangle}\triangle_a^2+\frac{172\,695}{\langle v\rangle}\triangle_a^4-\frac{11\,206\,335}{\langle w\rangle}\triangle_a^6+\ldots\right)\\
D^{-5} &= a^5\square_a\left(\triangle_a^{-5}+\frac{2}{24}\triangle_a^{-3}-\frac{480}{\langle u\rangle}\triangle_a+\frac{78\,720}{\langle v\rangle}\triangle_a^3-\frac{5\,656\,320}{\langle w\rangle}\triangle_a^5+\ldots\right)
\end{aligned}\right\}\tag{128}$$

Die Bestimmung der arbiträren Konstanten der Integrale wird sowohl bei diesen Formeln als auch bei (123) und (93) von den arbiträren Konstanten in $\triangle^{-1}$, $\triangle^{-2}$, $\triangle^{-3}$, $\triangle^{-4}$, $\triangle^{-5}$, ... abhängig gemacht. Nur ausnahmsweise werden dieselben so früh bekannt vorliegen, dass sie während der Summation berücksichtigt werden können, wodurch diese Summenspalten aus den Funktionswerten der Tafel abgeleitet werden. In der Regel wird man genötigt sein, die Summenkonstanten völlig willkürlich zu wählen, und man muss dann vorläufig einen so grossen Teil der Tafel der Integrale damit berechnen, dass man — eventuell durch Interpolation darin — untersuchen kann, ob den Bedingungen der speziellen Aufgabe Genüge getan ist, oder ob man zu den Integralen ferner eine Konstante oder, bei einem Integrale der n^{ten} Ordnung, eine ganze algebraische Funktion des $n-1^{\text{ten}}$ Grades addiren soll.

§ 30.

Als symbolische Reihen sind (122), (123), (127) und (128) an sich weder konvergent noch divergent.

Ob diese Reihen für numerisches Rechnen hinlänglich konvergent sind, wird, wenn die Differenzentafel nicht offenbar hindernde Abnormitäten zeigt, hauptsächlich von der Grösse des Intervalles abhängen. Wir sehen ja aus (109) und (111), dass in jeder $\triangle_a^n$ das Hauptglied $a^n\triangle^n$ ist; folglich wird eine Verkleinerung des Intervalles sich durch eine schnellere Konvergenz und also eine leichtere Ausführung jeder einzelnen numerischen Differentiation und Integration immer empfehlen.

Die Frage aber, wie grosse Genauigkeit durch Differentiiren oder Integriren mittelst einer Tafel zu erreichen ist, deren Werte nicht exakt, sondern beobachtet oder abgerundet sind, ist etwas verwickelter und erfordert Bestimmungen des mittleren Fehlers der verschiedenen Ausdrücke für D^n. Um diese zu finden, müssen

wir die Ausdrücke für Differenzen und Mitteldifferenzen als Funktionen von Tafelwerten einsetzen. Wir haben

$$
\begin{aligned}
\triangle_a &= E^{\frac{a}{2}} - E^{-\frac{a}{2}} & \qquad \square_a \triangle^a &= \tfrac{1}{2} E^a - \tfrac{1}{2} E^{-a} \\
\triangle_a^2 &= E^a - 2 + E^{-a} & \square_a \triangle_a^2 &= \tfrac{1}{2} E^{\frac{3}{2}a} - \tfrac{1}{2} E^{\frac{a}{2}} - \tfrac{1}{2} E^{-\frac{a}{2}} + \tfrac{1}{2} E^{-\frac{3}{2}a} \\
\triangle_a^3 &= E^{\frac{3}{2}a} - 3E^{\frac{a}{2}} + 3E^{-\frac{a}{2}} - E^{-\frac{3}{2}a} & \square_a \triangle_a^3 &= \tfrac{1}{2} E^{2a} - E^a + E^{-a} - \tfrac{1}{2} E^{-2a} \\
\triangle_a^4 &= E^{2a} - 4E^a + 6 - 4E^{-a} + E^{-2a} & \square_a \triangle_a^4 &= \tfrac{1}{2} E^{\frac{5}{2}a} - \tfrac{3}{2} E^{\frac{3}{2}a} + E^{\frac{a}{2}} + E^{-\frac{a}{2}} - \\
& & &\quad - \tfrac{3}{2} E^{-\frac{3}{2}a} + \tfrac{1}{2} E^{-\frac{5}{2}a} \\
\triangle_a^5 &= E^{\frac{5}{2}a} - 5E^{\frac{3}{2}a} + 10E^{\frac{a}{2}} - 10E^{-\frac{a}{2}} + & \square_a \triangle_a^5 &= \tfrac{1}{2} E^{3a} - 2E^{2a} + \tfrac{5}{2} E^a - \tfrac{5}{2} E^{-a} + \\
&\quad + 5E^{-\frac{3}{2}a} - E^{-\frac{5}{2}a} & &\quad + 2E^{-2a} - \tfrac{1}{2} E^{-3a}
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Hiedurch kann dann jede der Differentiationsformeln zu einer homogenen, linearen Funktion der Tafelwerte umschrieben werden, und besonders wird nach (122)

$$D^n = a^{-n}\left(h_0 E^{-\frac{n}{2}a} + \ldots + h_n E^{\frac{n}{2}a}\right)$$

und nach (127)

$$D^n = a^{-n}\left(k_0 E^{-\frac{n+1}{2}a} + \ldots + k_{n+1} E^{\frac{n+1}{2}a}\right); \tag{129}$$

kennt man also die Quadrate von den mittleren Fehlern der Tafel, findet man das Quadrat des mittleren Fehlers von D^n durch

$$
\begin{aligned}
\lambda_2(D^n) &= a^{-2n}\left(h_0^2 \lambda_2(E^{-\frac{n}{2}a}) + \ldots + h_n^2 \lambda_2(E^{\frac{n}{2}a})\right) \\
&= a^{-2n}\left(k_0^2 \lambda_2(E^{-\frac{n+1}{2}a}) + \ldots + k_{n+1}^2 \lambda_2(E^{\frac{n+1}{2}a})\right).
\end{aligned} \tag{130}
$$

Die Koeffizienten h und k werden von lauter Gliedern mit denselben Vorzeichen zusammengesetzt, und deshalb ist auch der mittlere Fehler mit der Ordnung der höchsten angewandten Differenzen steigend; doch ist das Steigen nicht so hoch wie bei Differenzen auf schräger Linie. Setzt man voraus, dass alle Tafelwerte ungebunden und gleich genau sind, und nimmt man ihren mittleren Fehler zur Einheit, zeigt die folgende Tafel die mittleren Fehler des ersten und des zweiten Differentialquotienten, teils durch einfache, teils durch mittlere Differenzen berechnet.

Ordnung der höchsten angewandten Differenzen	Mittlerer Fehler für D berechnet durch $\triangle_a^r$	durch $\square_a \triangle_a^r$
1	$1{\cdot}41\,a^{-1}$	$0{\cdot}71\,a^{-1}$
3	$1{\cdot}60\,a^{-1}$	$0{\cdot}96\,a^{-1}$
5	$1{\cdot}66\,a^{-1}$	$1{\cdot}08\,a^{-1}$
7	$1{\cdot}69\,a^{-1}$	$1{\cdot}17\,a^{-1}$
9	$1{\cdot}71\,a^{-1}$	$1{\cdot}23\,a^{-1}$
11	$1{\cdot}73\,a^{-1}$	$1{\cdot}28\,a^{-1}$

Ordnung der höchsten angewandten Differenzen	Mittlerer Fehler für D^2 berechnet durch $\triangle_a^r$	durch $\square_a \triangle_a^r$
2	$2{\cdot}45\, a^{-2}$	$1{\cdot}00\, a^{-2}$
4	$3{\cdot}13\, a^{-2}$	$1{\cdot}53\, a^{-2}$
6	$3{\cdot}46\, a^{-2}$	$1{\cdot}87\, a^{-2}$
8	$3{\cdot}65\, a^{-2}$	$2{\cdot}11\, a^{-2}$
10	$3{\cdot}77\, a^{-2}$	$2{\cdot}30\, a^{-2}$
12	$3{\cdot}86\, a^{-2}$	$2{\cdot}44\, a^{-2}$

Was die Genauigkeit numerischer Differentiation betrifft, zeigt sich nun als Hauptsache, dass die mittleren Fehler der gefundenen Werte mit dem Intervall, beziehungsweise dem Quadrate des Intervalles, umgekehrt proportional sind. Die Regel muss deshalb sein, hierzu so grosse Intervalle anzuwenden, wie es die Konvergenz der Reihen gestattet. Was man durch das Mitnehmen vieler Glieder der Reihen an Genauigkeit verliert, ist verhältnismässig unbedeutend. Nur wenn man Differentialquotienten für Argumente im Anfange oder im Schlusse der Tafel berechnen soll, also als Notbehelf, um teils den Gebrauch von Differenzen auf schräger Linie zu vermeiden, und teils deren Anwendung weniger unsicher zu machen, wäre es zu empfehlen, verkleinerte Intervalle zu numerischer Differentiation anzuwenden. Bei numerischer Integration ist das Verhältnis ungefähr umgekehrt. Die Koeffizienten in (123) und (128) sind im Ganzen so klein, dass der mittlere Fehler des Resultates praktisch genommen derselbe ist für D^{-n} als für das Hauptglied $a^n \triangle_a^{-n}$. Was aber die n^{te} Summe betrifft, ist die Grösse der Fehler mittelst der Anhäufung der Tafelfehler durch die Summationen zu bestimmen, und da die Anzahl der Addenden wächst, wenn das Intervall verkleinert wird, wird das Quadrat des mittleren Fehlers der Summen der n^{ten} Ordnung im Wesentlichen wie die $(2n-1)^{\text{ste}}$ Potenz der Anzahl wachsen; da es aber mit a^{2n} zu multipliziren ist, um das Quadrat des mittleren Fehlers für das n^{te} Integral zu geben, wird für Integrale einer beliebigen Ordnung das Quadrat des mittleren Fehlers im Wesentlichen dem Intervalle proportional. Bei numerischer Integration ist es vorteilhaft, viele und kleine Intervalle anzuwenden. Am liebsten müssen diese kleinen Intervalle durch direkte Berechnung der Tafelwerte entstehen; verschafft man sie sich durch Interpolation, treten zwischen ihnen Bande auf, die den Vorteil illusorisch machen können.

Numerische Integration führt also eine gewisse, schwache Ausgleichung der Fehler der Tafel herbei. Dies hindert indessen nicht, dass bei sehr ausgedehnten numerischen Integrationen die Fehler anwachsen und die Methode völlig unanwendbar machen können. Hat man z. B. eine periodische, um 0 schwingende Funktion zu integriren, werden ihre bestimmten Integrale auch periodisch um 0

schwingen, und ihre kleinen Werte können von den beständig wachsenden Summationsfehlern zuletzt völlig versteckt werden.

Aus den obenstehenden kleinen Tafeln der mittleren Fehler bei Differentiation der ersten Ordnungen, ist ersichtlich, dass der Unterschied zwischen der Anwendung von einfachen Differenzen und von Mitteldifferenzen auffällig ist. Er ist beständig zu Gunsten der letzteren, und der Vorteil bei diesen ist am grössten, wenn die Reihen auf ihre Anfangsglieder beschränkt werden, wird aber bei wachsender Anzahl der Glieder in den Reihen kleiner. Hält man sich an das Hauptglied, ist das Verhältnis zwischen den mittleren Fehlern für den 1sten Differentialquotienten 2, für den 2ten $\sqrt{6}$ und im Allgemeinen $\sqrt{2(n+1)}$. Eine recht bedeutende Ausgleichung findet also hier statt, wenn man die Mitteldifferenzen benutzt, und diese verdankt man nur zum geringsten Teile der Operation $\square$ selbst; denn die Mittelzahl zweier ungebundener, gleich genauer Zahlen verkleinert nur die ursprünglichen mittleren Fehler in dem Verhältnis $\sqrt{2} : 1$. Die Hauptsache ist, dass Mittelzahlen aus zwei konsekutiven Differenzen gebildet werden, zwischen denen sich immer starke Bande finden, welche die eine wachsen lassen, während die andere abnimmt.

Wenn man aus einer Tafel Differentialquotienten sowohl für die Argumente der Tafel als für die Mitte jedes Intervalles abwechselnd durch (122) und durch (127) berechnet, entsteht ein sehr fühlbarer Unterschied in der Genauigkeit der Resultate. Man kann denselben durch die Wiederholung der Mittelzahlsoperation verkleinern; daraus folgt nämlich eine weitere Ausgleichung, die den am wenigsten genauen Differentialquotienten zu gute kommt, doch nur mit einer weiteren Verkleinerung des mittleren Fehlers in dem schwächeren Verhältnis $\sqrt{\frac{(n+2).2}{3}} : 1$. Da $\square_a^2 = 1 + \frac{1}{4}\triangle_a^2$ ist, hat man identisch

$$1 = \square_a^2\left(1 - \frac{1}{4}\triangle_a^2 + \frac{1}{16}\triangle_a^4 - \frac{1}{64}\triangle_a^6 + \ldots + \left(-\frac{\triangle^2}{4}\right)^r\right) + \ldots \tag{131}$$

und

$$1 = \square_a^4\left(1 - \frac{2}{4}\triangle_a^2 + \frac{3}{16}\triangle_a^4 - \frac{4}{64}\triangle_a^6 + \ldots + (r+1)\left(-\frac{\triangle_a^2}{4}\right)^r\right) + \ldots \tag{132}$$

Die erste giebt durch symbolische Multiplikation mit (122)

$$\left.\begin{aligned}
D &= a^{-1}\square_a^2\left(\triangle_a - \frac{7}{24}\triangle_a^3 + \frac{447}{5760}\triangle^5 - \frac{58\,347}{\langle u\rangle}\triangle_a^7 + \frac{7\,167\,015}{\langle v\rangle}\triangle_a^9 - \frac{481\,060\,215}{\langle w\rangle}\triangle_a^{11} + \ldots\right.\\
D^2 &= a^{-2}\square_a^2\left(\triangle_a^2 - \frac{8}{24}\triangle_a^4 + \frac{544}{5760}\triangle_a^6 - \frac{73\,728}{\langle u\rangle}\triangle_a^8 + \frac{9\,289\,728}{\langle v\rangle}\triangle_a^{10} - \frac{635\,240\,448}{\langle w\rangle}\triangle_a^{12} + \ldots\right.\\
D^3 &= a^{-3}\square_a^2\left(\triangle_a^3 - \frac{9}{24}\triangle_a^5 + \frac{651}{5760}\triangle_a^7 - \frac{91\,713}{\langle u\rangle}\triangle_a^9 + \frac{11\,870\,559}{\langle v\rangle}\triangle_a^{11} - \frac{828\,047\,313}{\langle w\rangle}\triangle_a^{13} + \ldots\right.\\
D^4 &= a^{-4}\square_a^2\left(\triangle_a^4 - \frac{10}{24}\triangle_a^6 + \frac{768}{5760}\triangle_a^8 - \frac{112\,512}{\langle u\rangle}\triangle_a^{10} + \frac{14\,972\,928}{\langle v\rangle}\triangle_a^{12} - \frac{1\,066\,512\,384}{\langle w\rangle}\triangle_a^{14} + \ldots\right.\\
D^5 &= a^{-5}\square_a^2\left(\triangle_a^5 - \frac{11}{24}\triangle_a^7 + \frac{895}{5760}\triangle_a^9 - \frac{136\,335}{\langle u\rangle}\triangle_a^{11} + \frac{18\,664\,455}{\langle v\rangle}\triangle_a^{13} - \frac{1\,358\,489\,595}{\langle w\rangle}\triangle_a^{15} + \ldots\right.
\end{aligned}\right\} \tag{133}$$

Ausser diesen Methoden für numerische Differentiation und Integration giebt es eine von Gauss angegebene Methode zur Berechnung des bestimmten Integrals der 1sten Ordnung als homogene, lineare Funktion von Funktionswerten in der möglich kleinsten Anzahl. Die Methode, die man in vielen Lehrbüchern findet, ist jedoch nur in den sehr seltenen Fällen zu empfehlen, wo die Funktionswerte für wilkürliche, auch irrationale Argumente äusserst leicht direkt berechnet werden können. Muss man sie aus einer vorliegenden Tafel durch Interpolation darstellen, ist die Methode nur ein Umweg.

Schliesslich soll hier daran erinnert werden, dass, wenn die zu differentiirende oder zu integrirende Funktion durch eine Tafel mit willkürlichen Argumenten mit ungleich grossen Intervallen gegeben ist, die beiden Aufgaben, numerische Integration und Differentiation, schon in den §§ 10—11 und 7—8 ihre allgemeinen Lösungen gefunden haben.

§ 31.

Tafeln, die, wie die Logarithmentafeln, von so Vielen angewandt werden sollen, dass die Arbeit und die Kosten der Herstellung keine Rolle spielen, werden mit so zahlreichen Argumenten ausgestattet, dass die erste Differenz zur Interpolation genügt.

Soll dagegen eine Tafel nur sehr wenig benutzt werden, z. B. zum Vergleich mit einer Reihe von Beobachtungen und zur Bildung von Normalwerten oder zur Ausgleichung der Restabweichungen, kann man für jede der hier geschilderten Interpolationsweisen Anwendung finden.

Häufig kommen aber dazwischen liegende Fälle vor, in welchen die Tafeln zwar nur von wenigen Rechnern, jedoch von diesen häufig genug, gebraucht werden sollen, um darauf Gewicht zu legen, dass für Sicherheit und Bequemlichkeit getan wird, was ohne zu viele Kosten möglich ist.

In solchen Fällen genügt es nicht, dass die Tafel der Hauptfunktion mit den notwendigsten Differenzen versehen wird. Viel wird gewonnen, indem man die Differenzen mit Differentialquotienten und die Summen der Funktion mit Integralen ersetzt. Soll dieser Umtausch vermittelst der Interpolationsrechnung geschehen, sind die Methoden dazu in früheren Paragraphen dargestellt worden. Jetzt wollen wir nur kurz den Gebrauch von Tafeln besprechen, die nach diesem Prinzip oder nach der sogenannten kontinuirlichen Methode eingerichtet sind.

Die Interpolation selbst geschieht hier immer durch die Taylorsche Reihe. Diese Simplifikation ist der erste grosse Vorteil der Methode. Sowohl für das Integral als für den Differentialquotienten von beliebiger Ordnung interpolirt man

nach

$$D^r \circ f(x+a) = \left(D^r + \ldots + \frac{a^n}{n!} D^{r+n} + \ldots\right) \circ f(x). \tag{134}$$

Wenn nur die Intervalle nirgends grösser werden, als dass die Interpolation scharf ausgeführt werden kann, wird es gleichgültig, ob das Intervall in der ganzen Tafel konstant ist.

Wünscht man für ein willkürliches, konstantes Intervall die Differenz oder die Summe von beliebiger Ordnung zu kennen, hat man nicht nötig, für jedes einzelne der betreffenden Argumente die Funktionswerte zu berechnen. Die symbolischen Reihen für cosinus und für Potenzen von sinus geben uns auf leichtere Weise diese Differenzen. Aus

$$\frac{\triangle_a}{2i} = \sin\frac{aD}{2i} = \frac{aD}{2i} + \frac{(aD)^3}{3!\,8i} + \frac{(aD)^5}{5!\,32i} + \ldots$$

folgt mit

$\langle u\rangle = 2\,903\,040$, $\langle t\rangle = 464\,486\,400$, $\langle s\rangle = 122\,624\,409\,600$ $\langle r\rangle = 2\,678\,117\,105\,664\,000$

$$\left.\begin{aligned}
\triangle_a &= aD + \frac{1}{24}(aD)^3 + \frac{3}{5760}(aD)^5 + \frac{9}{\langle u\rangle}(aD)^7 + \frac{5}{\langle t\rangle}(aD)^9 + \frac{3}{\langle s\rangle}(aD)^{11} + \frac{105}{\langle r\rangle}(aD)^{13} + \ldots\\
\triangle_a^2 &= (aD)^2 + \frac{2}{24}(aD)^4 + \frac{16}{5760}(aD)^6 + \frac{144}{\langle u\rangle}(aD)^8 + \frac{256}{\langle t\rangle}(aD)^{10} + \frac{512}{\langle s\rangle}(aD)^{12} + \frac{61\,440}{\langle r\rangle}(aD)^{14} + \ldots\\
\triangle_a^3 &= (aD)^3 + \frac{3}{24}(aD)^5 + \frac{39}{5760}(aD)^7 + \frac{615}{\langle u\rangle}(aD)^9 + \frac{2\,013}{\langle t\rangle}(aD)^{11} + \frac{7\,665}{\langle s\rangle}(aD)^{13} + \frac{1\,793\,613}{\langle r\rangle}(aD)^{15} + \ldots\\
\triangle_a^4 &= (aD)^4 + \frac{4}{24}(aD)^6 + \frac{72}{5760}(aD)^8 + \frac{1632}{\langle u\rangle}(aD)^{10} + \frac{7\,936}{\langle t\rangle}(aD)^{12} + \frac{46\,080}{\langle s\rangle}(aD)^{14} + \frac{16\,776\,192}{\langle r\rangle}(aD)^{16} + \ldots\\
\triangle_a^5 &= (aD)^5 + \frac{5}{24}(aD)^7 + \frac{115}{5760}(aD)^9 + \frac{3405}{\langle u\rangle}(aD)^{11} + \frac{22\,085}{\langle t\rangle}(aD)^{13} + \frac{174\,255}{\langle s\rangle}(aD)^{15} + \frac{87\,579\,705}{\langle r\rangle}(aD)^{17} + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{135}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\triangle_a^{-1} &= (aD)^{-1} - \frac{1}{24}\,aD + \frac{7}{5760}(aD)^3 - \frac{93}{\langle u\rangle}(aD)^5 + \frac{381}{\langle t\rangle}(aD)^7 - \frac{2\,555}{\langle s\rangle}(aD)^9 + \frac{1\,414\,477}{\langle r\rangle}(aD)^{11} - \ldots\\
\triangle_a^{-2} &= (aD)^{-2} - \frac{2}{24} + \frac{24}{5760}(aD)^2 - \frac{480}{\langle u\rangle}(aD)^4 + \frac{2\,688}{\langle t\rangle}(aD)^6 - \frac{23\,040}{\langle s\rangle}(aD)^8 + \frac{15\,566\,848}{\langle r\rangle}(aD)^{10} - \ldots\\
\triangle_a^{-3} &= (aD)^{-3} - \frac{3}{24}(aD)^{-1} + \frac{51}{5760}(aD) - \frac{1371}{\langle u\rangle}(aD)^3 + \frac{9\,861}{\langle t\rangle}(aD)^5 - \frac{104\,553}{\langle s\rangle}(aD)^7 + \frac{84\,771\,385}{\langle r\rangle}(aD)^9 - \ldots\\
\triangle_a^{-4} &= (aD)^{-4} - \frac{4}{24}(aD)^{-2} + \frac{88}{5760} - \frac{2976}{\langle u\rangle}(aD)^2 + \frac{26\,240}{\langle t\rangle}(aD)^4 - \frac{333\,312}{\langle s\rangle}(aD)^6 + \frac{317\,368\,320}{\langle r\rangle}(aD)^8 - \ldots\\
\triangle_a^{-5} &= (aD)^{-5} - \frac{5}{24}(aD)^{-3} + \frac{135}{5760}(aD)^{-1} - \frac{5505}{\langle u\rangle}\,aD + \frac{57\,565}{\langle t\rangle}(aD)^3 - \frac{854\,055}{\langle s\rangle}(aD)^5 + \frac{936\,772\,845}{\langle r\rangle}(aD)^7 - \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Durch die Multiplikation dieser symbolischen Reihen mit

$$\square_a = \cos\frac{aD}{2i} = 1 + \frac{(aD)^2}{2!\,4} + \frac{(aD)^4}{4!\,16} + \ldots$$

erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\square_a &= 1 + \frac{3}{24}(aD)^2 + \frac{15}{5760}(aD)^4 + \frac{63}{2\,903\,040}(aD)^6 + \dots \\
\square_a\triangle_a &= aD + \frac{4}{24}(aD)^3 + \frac{48}{5760}(aD)^5 + \frac{576}{2\,903\,040}(aD)^7 + \dots \\
\square_a\triangle_a^2 &= (aD)^2 + \frac{5}{24}(aD)^4 + \frac{91}{5760}(aD)^6 + \frac{1\,845}{2\,903\,040}(aD)^8 + \dots \\
\square_a\triangle_a^3 &= (aD)^3 + \frac{6}{24}(aD)^5 + \frac{144}{5760}(aD)^7 + \frac{4\,080}{2\,903\,040}(aD)^9 + \dots \\
\square_a\triangle_a^4 &= (aD)^4 + \frac{7}{24}(aD)^6 + \frac{207}{5760}(aD)^8 + \frac{7\,491}{2\,903\,040}(aD)^{10} + \dots \\
\square_a\triangle_a^5 &= (aD)^5 + \frac{8}{24}(aD)^7 + \frac{280}{5760}(aD)^9 + \frac{12\,288}{2\,903\,040}(aD)^{11} + \dots
\end{aligned}\right\} \quad (137)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\square_a\triangle_a^{-1} &= (aD)^{-1} + \frac{2}{24}\,aD - \frac{8}{5760}(aD)^3 + \frac{96}{2\,903\,040}(aD)^5 - \dots \\
\square_a\triangle_a^{-2} &= (aD)^{-2} + \frac{1}{24} - \frac{21}{5760}(aD)^2 + \frac{465}{2\,903\,040}(aD)^4 - \dots \\
\square_a\triangle_a^{-3} &= (aD)^{-3} - \frac{24}{5760}\,aD + \frac{960}{2\,903\,040}(aD)^3 - \dots \\
\square_a\triangle_a^{-4} &= (aD)^{-4} - \frac{1}{24}(aD)^{-2} - \frac{17}{5760} + \frac{1\,371}{2\,903\,040}(aD)^2 - \dots \\
\square_a\triangle_a^{-5} &= (aD)^{-5} - \frac{2}{24}(aD)^{-3} + \frac{1\,488}{2\,903\,040}\,aD - \dots
\end{aligned}\right\} \quad (138)$$

Die häufigste Anwendung findet zur Berechnung von äquidistanten Summen einer willkürlichen Anzahl von Addenden statt, — und dies spielt in der Technik der Lebensversicherung eine Rolle.

Für
$$S = f(c) + f(c+a) + \dots + f(c+(n-1)a)$$
zeigt
$$(1 + e^{aD} + \dots + e^{(n-1)aD})\,(e^{\frac{1}{2}aD} - e^{-\frac{1}{2}aD}) = e^{(n-\frac{1}{2})aD} - e^{-\frac{1}{2}aD}$$
dass
$$S = \triangle_a^{-1} \circ \left(f(c+(n-\tfrac{1}{2})a) - f(c-\tfrac{1}{2}a)\right).$$

Nach der 1sten Gleichung (136) ist demnach

$$S = \frac{1}{a}\int_{c-\frac{1}{2}a}^{c+(n-\frac{1}{2})a} f(x)\,dx - \frac{a}{24}\left(f'(c+(n-\tfrac{1}{2})a) - f'(c-\tfrac{1}{2}a)\right) + \frac{7}{5760}\left(f'''(c+(n-\tfrac{1}{2}a) - f'''(c-\tfrac{1}{2}a)\right) - \dots \quad (139)$$

Hierzu ist also Interpolation für das Integral und die Differentialquotienten der ungeraden Ordnung für die beiden Argumente $c - \frac{a}{2}$ und $c + \left(n - \frac{1}{2}\right)a$ erforderlich, insofern dieselben nicht in der Tafel selbst gegeben sind.

Da aber zugleich

$$S + \frac{1}{2} f(c+na) - \frac{1}{2} f(c) = \frac{1}{2} f(c) + f(c+a) + \ldots + f(c+(n-1)a) + \frac{1}{2} f(c+na)$$

zeigt

$$\left(\frac{1}{2} + e^{aD} + \ldots + e^{(n-1)aD} + \frac{1}{2} e^{naD}\right) \circ \left(e^{\frac{1}{2}aD} - e^{-\frac{1}{2}aD}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}aD} + e^{-\frac{1}{2}aD}\right) \circ \left(e^{naD} - 1\right)$$

dass

$$S = \left(\Box_a \triangle_a^{-1} - \frac{1}{2}\right) \circ \left(f(c+na) - f(c)\right).$$

Nach der 1sten Gleichung (138) ist

$$S = \frac{1}{a}\int_0^{c+na} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\left(f(c+na) - f(c)\right) + \frac{a}{12}\left(f'(c+na) - f'(c)\right) - \frac{a^3}{720}\left(f'''(c+na) - f'''(c)\right) + \ldots \quad (140)$$

Dabei sind also Interpolationen sowohl von den Funktionswerten als von ihrem Integral und ihren Differentialquotienten ungerader Ordnung erforderlich, hier für die beiden Argumente c und $c+na$.

Sollen äquidistante Summen für das Produkt von der Funktion der Tafel mit einer linearen Funktion des Argumentes berechnet werden, müssen $\triangle_a^{-2}$ in (136) oder $\Box_a \triangle_a^{-2}$ in (138) benutzt werden; hier muss man für 3 Argumente Integrale, Funktionswerte und Differentialquotienten durch Interpolation suchen. Z. B.

$$T = f\left(c+(n-1)a\right) + 2f\left(c+(n-2)a\right) + \ldots + (n-1)f(c+a) + nf(c)$$

kann man durch

$$\left(n + (n-1)e^{aD} + \ldots + 2e^{(n-2)aD} + e^{(n-1)aD}\right) \circ \left(e^{\frac{1}{2}aD} - e^{-\frac{1}{2}aD}\right)^2$$

$$= e^{naD} - (n+1) + ne^{-aD}$$

finden, folglich

$$T = \triangle_a^{-2} \circ \left(f(c+na) - (n+1)f(c) + nf(c-a)\right),$$

was man sehr leicht nach der 2ten Gleichung (136) berechnet.

DRITTER TEIL.

§ 32.

Die Interpolationsmethode Newtons ist — wie wir es schon gesehen haben — kein Universalmittel. Ursprünglich auf die ganzen rationalen Funktionen beschränkt, hat sich ihre Anwendung auf solche Funktionen unbedingt erweitern lassen, deren Interpolation immer in der Form von konvergenten unendlichen Reihen gelingt, wie die rekurrenten Funktionen, die sich als Null-Einheiten den ganzen rationalen Funktionen nahe anschliessen.

Unter der Mannigfaltigkeit der Funktionen scheidet sich diese Klasse, die wir als die normale ansehen müssen, durch Eigenschaften aus, die wir kontinuirte Eindeutigkeit nennen können, die aber am besten durch die Abweichungen erkannt werden, die bei anderen Funktionen vorkommen, jedoch nicht bei den normalen.

Schon die gebrochen rationalen Funktionen haben für gewisse endliche Argumente — Pole — unendliche Funktionswerte. Dieses ist für uns eine Abnormität, denn die normalen Funktionen bleiben endlich für alle endlichen Argumente. Die Pole sind abnorme Argumente.

Mehrdeutige Funktionen können, wenn die Anzahl der Funktionswerte konstant bleibt, zuweilen in derselben Anzahl von normalen Funktions-Zweigen aufgelöst werden. Ändert sich aber die Anzahl der mehrdeutigen Werte bei gewissen Argumenten oder erscheint die Mehrdeutigkeit nur bei isolirten Argumenten, sind diese abnorm zu nennen wegen Unterbrechung der Kontinuität durch Sprünge, die bei normalen Funktionen nie vorkommen.

Wenn überhaupt ein sonst eindeutiger Funktionszweig oder irgend einer seiner Differentialquotienten für endliche Argumente unendlich gross oder unbestimmt wird, zeigt sich eine Abnormität der Funktion und die entsprechenden Argumente sind abnorm.

Versucht man es eine Interpolation für ein abnormes Argument durchzuführen, kann das Resultat weder eine endliche noch eine konvergente, sondern muss immer eine divergente Reihe sein.

Sind die Abnormitäten einer Funktion auf wenige Argumente beschränkt, wird man sie oft für Argumente interpoliren können, die nur von den abnormen Argumenten genügend fern gehalten werden. Beispiele sind die Logarithmen-Funktion mit ihrer einzigen Abnormität $\log 0 = \infty$ und die Brüche niedrigen Grades wie $\frac{1}{1+x^2}$, dessen Pole $\pm i$ sind.

Das Gelingen der Interpolation nach Newtons Formel ist aber hier und über-

haupt, wenn die Funktion keine ganze rationale ist, von der Verteilung der zur Interpolation angewandten Argumente abhängig. Bei unzweckmässiger Wahl der Argumente oder in Folge ungenügender Ausstattung der Tafel können divergente Interpolationsreihen auch da vorkommen, wo keine eigentlichen Abnormitäten vorliegen. Zu diesen Fällen scheinbarer Abnormität muss man überall in der Praxis auch solche mitrechnen, wo die Konvergenz zu langsam ist.

Wir werden in einer Beilage (§ 48) Metoden besprechen, die nicht nur die langsame Konvergenz verbessern können, sondern auch solchen Fällen von Divergenz abhelfen, die nicht als Zeichen unendlicher oder unbestimmter Funktionswerte aufzufassen sind. Vorläufig sehe ich doch von diesen Metoden ab, weil mir die Grenzen ihrer praktischen Anwendbarkeit noch nicht hinlänglich festgestellt scheinen.

In allen Fällen der Abnormität muss man dann andere Auswege suchen; die Methode Newtons hat aber in ihrer Einfachheit so grosse Vorteile, dass man sie nicht ohne dringende Notwendigkeit aufgeben wird, und dass man sich selbst dann mit so kleinen Änderungen wie möglich zu behelfen suchen wird. Weiss man im voraus nicht mit Gewissheit, dass Abnormitäten vorhanden sind, muss man es sich zur Regel machen, jede Untersuchung einer Tafel und besonders jede Beobachtungsreihe mit Versuchen der Interpolation nach der Methode Newtons anfangen. Man muss unbedingt das Schema mit dividirten (eventuell mit einfachen) Differenzen so weit entwickeln, dass die Differenzprobe unternommen werden kann; während dieser muss man aber die Kritik nicht nur auf die Entdeckung von Rechenfehlern und groben Beobachtungsfehlern richten, sondern auch auf die verschiedenen Zeichen, die die Gegenwart und die Art von Abnormitäten kundgeben. Wenn die Differenzprobe keine Abnormität zeigt, kann man nach ihrer völligen Durchführung das Schema zur Interpolation nach der Formel Newtons recht ruhig anwenden. Schwierig ist es dagegen die warnenden Zeichen in der rechten Weise zu deuten, um dadurch zur Erkenntnis der Art der Abnormität zu gelangen. Nur nach langjähriger Erfahrung wird man ein Meister in dieser Kunst. Den Studirenden ist es zu empfehlen, sich Tafeln zu bilden über Funktionen mit bekannten Abnormitäten, gebrochene Funktionen mit einzelnen oder doppelten «Polen», irrationale und mehrdeutige Funktionen, Exponentialfunktionen mit grosser Grundzahl und Funktionen mit kurzer Periodenlänge, am liebsten alles mit äquidistanten Argumenten. Das Differenzensystem muss für die Funktion jeder Art mit Variation des Tafelintervalles entwickelt werden.

Die Unregelmässigkeiten, an denen ein Rechenfehler schuld ist, gleichen solchen, die in den Differenzen der Tafel, vor und nach der Zeile des Argumentes erscheinen, für welches die Funktion eine eigentliche Abnormität hat. Kein Wunder! denn

fasste man einen Rechenfehler als etwas auf, das wirklich zu der Funktion gehörte, würde diese dadurch eine Abnormität bekommen. In beiden Fällen zeigt das Schema grosse Differenzen mit beständig wechselndem Vorzeichen, am gewaltigsten auf der Zeile mit dem kritischen Argument, das sich dadurch kundgiebt. Der Unterschied zwischen Fehler und Abnormität ist der, dass die Unregelmässigkeiten der Differenzen im Allgemeinen nicht so plötzlich eintreten, wie bei den Fehlern, sondern meistens beiderseits mit einem schnell zunehmenden Wachsen der Differenzen von jeder Ordnung eingeleitet werden, vorläufig ohne Wechseln der Vorzeichen. Wenn an der Abnormität der Umstand schuld ist, dass die Funktion zweideutig ist, und dass zwei Zweige bei dem abnormen Argument mit unendlichem 1sten Differentialquotienten sich begegnen, muss die Tafel über die reellen Werte einer solchen Funktion im Allgemeinen bei dem abnormen Argument enden. Ihre Differenzen können uns dann schwerlich die Vorzeichenwechsel zeigen, sondern nur den starken Zuwachs gegen die abnorme Stelle.

Uneigentlichen Abnormitäten gegenüber können die Differenzen mehr oder weniger normal verlaufen, und die Warnung besteht nur darin, dass die Differenzen mit wachsender Ordnung zunehmen oder, doch allzu langsam, abnehmen. Treten Vorzeichenwechsel ein, geschieht es in der Regel periodisch über die ganze Tafel, und ihre Häufigkeit nimmt nicht immer mit der Ordnung zu. Die Grenze gegen das normale ist fliessend; und auch gegen die eigentlichen Abnormitäten ist sie nicht scharf. Einen solchen Übergang kann man in dem Falle beobachten, wo eine Tafel nur reelle Argumente hat, während die Funktion zwar eigentliche Abnormitäten hat, jedoch nur für imaginäre Argumente, wie z. B. $\frac{1}{1+x^2}$ es für $x = \pm i$ hat. Die Differenzen können dann anscheinend normal verlaufen, wenn die Intervalle der Argumente klein sind, offenbaren aber deutlich die Abnormität, wenn die Intervalle gross genommen werden. In dem Beispiel, je nachdem das Intervall $\lessgtr \frac{1}{2}$ ist. Mit Intervallen von 0·1 oder weniger kann sogar recht wohl nach der Formel Newtons interpolirt werden.

In den folgenden §§ werden wir die Mittel besprechen, die in abnormen Fällen für die Interpolation anwendbar sind. Zuerst wollen wir einige Worte über die Verkleinerung der Intervalle sagen.

Als Ziel der Herstellung von bequemen Tafeln sind die kleinen Intervalle der Argumente erwünscht. Als Mittel gegen Abnormitäten sind dieselben auch vortrefflich, vorausgesetzt, dass die Erweiterung der Tafel in anderer Weise als eben durch Newtonsche Interpolation herbeigeführt werden kann; so z. B. im Falle der Logarithmentafel, mit welcher man durch Divisionen mit Potenzen von 10 bis in der unmittelbaren Nähe der Abnormität interpoliren kann.

Ist man durch irgend welche andere Mittel an Intervalle gelangt, die klein

genug sind, um Newtonsche Interpolation zu erlauben, wird man auch diese anwenden, um die Argumente äquidistant zu machen und so nach Briggs Weise die Intervalle teilen.

Unzweckmässig ist die Verkleinerung des Intervalles, wenn die Aufgabe die ist, eine empirische Interpolationsformel zu finden; in diesem Falle muss man lieber Tafelargumente auslassen als neue hinzufügen.

Zweck einer solchen Formel ist es, eine Reihe von Beobachtungen (oder Werte einer schwierigen Tafel) mittelst einer leicht zu berechnenden algebraischen Formel darzustellen. In eine solche Formel darf man nicht unnötig viele Glieder aufnehmen, jedes mit seinen zu bestimmenden Konstanten. Und dadurch ist die Zahl der anzuwendenden Tafel-Angaben beschränkt. Es genügt nicht, dass die Funktion in eine konvergente Reihe entwickelt werden kann. Die Konvergenz muss eine gewaltige sein. Wenn Newtons Formel mehr als die erlaubte Zahl von Gliedern und Konstanten fordert, muss sie durch eine andere Form ersetzt werden.

§ 33.

Weil man in den erwähnten abnormen Fällen die Funktionstafeln nicht ganz einfach nach der Metode Newtons interpoliren kann, ist es nicht gleich notwendig, andere Interpolationsmetoden aufzusuchen. In der Regel lässt die Tafel sich in der Weise umbilden, dass die Metode Newtons dadurch auf eine transformirte Funktion anwendbar gemacht wird, durch die man mehr oder weniger leicht die Werte der gesuchten darstellen kann.

Eine widerspenstige Tafel kann in fast allen praktischen Verhältnissen durch eine andere ersetzt werden, in der entweder das Argument oder der Funktionswert oder alle beide zweckmässig gewählte Funktionen des ursprünglichen Argumentes oder des Funktionswertes oder der beiden sind. Man kann auch oft ein Hilfs-Argument anwenden, eine, mittelst des ursprünglichen Argumentes zu interpolirende Funktion, mit Bezug auf welche die Funktion sich interpoliren lässt.

Hierher gehört auch das Mittel, dessen Anwendung man zu allererst versuchen wird, nämlich der einfache Umtausch von Argument gegen Funktionswert. Dieses erfordert eine Neurechnung von dividirten Differenzen, dadurch können aber die Abnormitäten manchmal wegfallen; freilich können Abnormitäten auch leicht da entstehen, wo keine waren. Dieses Mittel, die umgekehrte Funktion zu interpoliren, haben wir im § 9 bei der Lösung von Gleichungen höheren Grades leise berührt. Für eine unbefangene Auffassung würde es am nächsten liegen, die Wurzel x in $f(x) = y = 0$ dadurch zu suchen, dass man nach Mutmassung über die Werte von x und nach Berechnung der entsprechenden von 0 abweichenden

Werte von y zu dem Wert von x interpolirte, der dem Argumente $y = 0$ in der Tafel der umgekehrten Funktion $x = \varphi(y)$ entspricht. Solche direkte Interpolation kann oft gelingen, aber sehr häufig würde dies auf eigentlichen Abnormitäten in $x = \varphi(y)$ scheitern. Da $y = f(x)$ eine ganze Funktion ist, ist man mit ihr gegen Abnormitäten gesichert; die Interpolation wird aber indirekt und muss durch Versuche ausgeführt werden, welche man wiederholen muss, bis die Intervalle so klein geworden sind, dass die erste Differenz allein für die Interpolation genügt.

Um die erwähnten Transformationen der Tafel methodisch aufzusuchen und sie in der besten Weise anzuwenden, muss man sich von der Funktionstheorie leiten lassen, wenn von eigentlichen Abnormitäten die Rede ist, und rücksichtlich der uneigentlichen Abnormitäten von analogen Betrachtungen.

Tritt z. B. eine Funktion mit einem irrationalen Faktor, wie in $y = (ax - b)^{\frac{2}{3}} f(x)$, multiplizirt auf, und hat man gefunden, dass die Abnormität bei $x_0 = \frac{b}{a}$ liegt, kann man sie durch Multiplikation mit $(x - x_0)^{\frac{1}{3}}$ wegschaffen. Kennt man x_0 nicht, wird die Transformation in eine Tafel für y^3 auch diese Abnormität beseitigen.

Wird eine Funktion für gewisse Argumente $a, b, \ldots, d$ unendlich, kann man diese «Pole» unschädlich machen, indem man die Funktion mit

$$(x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \ldots (x - d)^{\delta}$$

multiplizirt.

Um aber dies auszuführen, müsste man erst sowohl die Pole $a, b, \ldots, d$ als die Exponenten $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ kennen. Sind diese Exponenten ganz, und lässt es sich vermuten, dass ihre Summe eine Zahl n nicht übersteigen kann, kann man die Aufgabe durch die Multiplikation der Funktion mit einer ganzen Funktion des n^{ten} Grades mit unbekannten Koeffizienten lösen. Dieselben müssen dann mittelst der linearen Bedingungsgleichungen berechnet werden, welche ausdrücken, dass die sämtlichen Differenzen der transformirten Funktion für eine Ordnung verschwinden, die durch Versuche bestimmt werden muss. Dieses Verfahren ist jedoch sehr mühsam; eine weit bessere Methode bieten uns die reziproken Differenzen (§ 39).

Bisweilen führt uns die Natur der Aufgabe selbst über die Schwierigkeiten hinaus. In der Lehre von der Bewegung zweier Himmelskörper ausschliesslich als Folge ihrer eigenen gegenseitigen Anziehung giebt es keine andere Abnormität, als dass die beiden Körper zusammenstossen. Eine Abnormität für die Entfernung $r = 0$ betrachtet man aber so zu sagen unter unendlicher Vergrösserung, indem man das Zeitelement dt mit r dividirt und $\frac{dt}{r} = du$ als Element eines neuen Argumentes, u, einführt, welches mit der excentrischen Anomalie proportional wird; mit u als Hilfs-Argument ist es in Tafeln sehr leicht zu interpoliren, sowohl für die Koordinaten der Himmelskörper als für die Zeit, obgleich es unmöglich ist, die Koordinaten zu interpoliren, wenn die Zeit das Argument wäre.

Durch Studien über Kindersterblichkeit fand Oppermann, dass die Intensität der Sterblichkeit in dem Augenblick der Geburt unendlich gross sein müsste, während doch die Sterbewahrscheinlichkeit in jedem endlichen Zeitraum endlich ist. Hierdurch wurde er dazu geführt, statt des Alters x dessen Quadratwurzel $\sqrt{x}$ als unabhängige Variable in seine Interpolationsformeln für die Kindersterblichkeit einzuführen. Auch in den Sterblichkeitsformeln für alle Lebensalter zeigt sich die Quadratwurzel des Alters als das vorteilhafteste Argument.

Neben dieser eigentlichen Abnormität haben die Sterblichkeitstafeln in der Form der Dekremententafeln eine schwierige scheinbare Abnormität, indem jede zur Beobachtung gewählte Bevölkerung mit einer plötzlichen assymptotischen Annäherung zum Schlussresultate, 0 überlebenden «Hundertjährigen», ausstirbt. Es ist in der Lebensversicherungs-Technik seit langer Zeit erkannt, dass diese uneigentliche Abnormität dadurch beseitigt wird, dass man statt der Anzahl lx von x-jährigen die Tafel den Logarithmus $\log lx$ angeben lässt. Doch offenbart sich auch in $\log lx$ eine uneigentliche Abnormität. In den Formeln von Gompertz und Makeham wird diese durch einen Addenden überwunden, der eine exponentiale Funktion von x ist. Besser ist es dem notwendigen Addenden die Form $ba^{\sqrt{x}}$ zu geben.

Auch bei allerlei Fehlergesetzfunktionen, sowohl bei typischen als bei schiefen, findet man ähnliche, uneigentliche Abnormität, eine plötzliche assymptotische Annäherung zur Häufigkeit $= 0$, und hier sowohl für positive als für negative grosse Abweichungen oder Fehler. Und auch hier ist es indizirt, die Tafel in der Weise umzubilden, dass sie die Logarithmen der Häufigkeiten angiebt, während der Betrag der Abweichungen das Argument der Tafel ist. Bei nicht so plötzlicher, assymptotischer Annäherung zu 0, würde die Interpolation dadurch gefördert werden, dass man die Tafel nicht die Funktion y, sondern $\frac{1}{y}$ angeben liesse. Wäre die Funktion $y = \frac{1}{1+x^2}$, würde dieses Mittel selbstverständlich sein.

Wenn die Tafel die Stelle von Punkten einer Kurve mit der Abscisse als Argument und mit der Ordinate als Funktionswert angiebt, wird man bei allen geschlossenen Kurven und überhaupt wo die Tangente sich senkrecht gegen die Abscissenachse stellt, eigentliche Abnormitäten finden. Es liegt dann am nächsten, die Schwierigkeiten dadurch zu bekämpfen, dass man das rechtwinkelige Koordinatensystem in ein polares,

$$x - a = r\cos v, \quad y - b = r\sin v,$$

transformirt.

Die Interpolation in einer Tafel, die r als Funktion eines Winkels v angiebt, hat dann Aussicht zu gelingen, wenn man die Koordinaten des Pols oder des neuen Nullpunkts a und b so gewählt hat, dass die Stelle desselben einigermassen zentral

in der Kurve zu liegen kommt. Die Interpolation kann unter günstigen Umständen über die ganze Kurve oder über grosse Teile derselben ausgeführt werden, und zwar auch über solche, die sonst verschiedene, durch die Abnormitäten unter sich getrennte Kurvenzweige ausmachen würden.

§ 34.

Wenn man nicht, wie der vorige § es voraussetzt, die matematische Form der Funktion kennt, also besonders, wenn die Tafel aus der Beobachtung über ein unbekanntes Naturverhältnis hervorgegangen ist, genügen die erwähnten Mittel oft nicht. Man muss dann, um einen Ausweg zu finden, der Phantasie freiere Zügel lassen, und zwar, indem man zur graphischen Interpolation seine Zuflucht nimmt; eine Kurve durch aufgegebene Punkte aus freier Hand zeichnen, ist ja auch eine Interpolation. Man wählt ein planes Koordinatensystem und zeichnet die Angaben der Tafel hinein, lässt z. B. die Argumente Abscissen und die Funktionswerte Ordinaten sein. Das Auge kann dann die sämtlichen Tafelpunkte gleichzeitig auffassen und sich ein Bild von der einfachsten Kurve durch sie alle machen; eine geübte Hand muss dieses Bild aufs Papier bringen. Um dieses Interpolationsresultat in Zahlen umzusetzen und den Funktionswert eines gegebenen Argumentes zu finden, hat man nur die dem Argumente entsprechende Koordinatlinie (den geometrischen Ort) zu zeichnen und auf dieser die andere Koordinate des Durchschnitts-Punktes bezw. die der Durchschnittspunkte der Kurve, auszumessen.

Zur Darstellung solcher Diagramme ist nur eine Fertigkeit nötig, die sich durch häufige und sorgfältige Übung erwerben lässt. Hier kommt es darauf an, seinen Sinn für einfache Schönheit der Formen so auszubilden, dass man ihn von jeder vorausgefassten Manier befreit. Es empfiehlt sich, dieselben Figuren zu wiederholten Malen zu zeichnen, indem man sich bei jeder Wiederholung auf eine geringere Anzahl von gegebenen Punkten stützt.

Eine auf die rechte Weise ausgeführte graphische Interpolation ist unter Interpolationen aller Arten diejenige, welche am meisten den Charakter eines Universalmittels hat. Sie ist ganz ebenso willkürlich und ungenau wie irgend eine andere Methode; wie hoch sie sich aber über alle Abnormitäten erhebt, sieht man schon daraus, dass die Ausführung von direkter und von indirekter Interpolation ihr gleich nahe liegt. Während des Zeichnens der Kurve zeigt es sich schon, ob die Kurve geschlossen oder vielleicht aus mehreren Zweigen zusammengesetzt ist. Das Betrachten der Veränderung der Krümmung wird mit einer genügenden Anzahl von Tafelpunkten deutlich angeben, ob die Kurve sich geradlinigen Assymptoten nähert, und ungefähr, wo solche liegen. Stellen sich die Tangenten auf die Achse des

Argumentes senkrecht, warnt dies nicht nur vor der entsprechenden Abnormität und zwar mit Angabe des Maximalargumentes, sondern man wird geradezu darauf hingewiesen, diesem durch Drehen des Koordinatensystems abzuhelfen oder vielleicht die rechtwinkeligen Koordinaten gegen polare umzutauschen.

Auch gleich im Anfange der Operationen kann man sich zum Umtausch des Koordinatensystems aufgefordert fühlen. Ebenso gut wie man die ursprünglichen Argumente und Werte der Tafel als rechtwinkelige Koordinaten auffassen kann, können sie auch — und zwar oft mit grossem Vorteil — als polare oder andere Koordinaten aufgefasst werden, und auch solche Änderung wird oft durch das Betrachten einer vorläufigen Zeichnung klarer als durch die trockenen Zahlen angedeutet. Ist z. B. die Funktion periodisch, wird sie in rechtwinkeligen Koordinaten durch eine Wellenlinie dargestellt werden, deren Behandlung recht schwierig sein kann, die uns aber doch oft von der Länge der Periode unterrichten kann. Dadurch wird man dann auf das Zeichnen einer neuen Kurve nach polaren Koordinaten mit den Argumenten als die Winkelkoordinate angewiesen sein, am liebsten derart, dass die Periodenlänge als die natürliche Einheit des Argumentes, als ein Winkel von 360° dargestellt wird.

Zur Anleitung während des Planmachens schwieriger Interpolationsaufgaben und zur schnellen Erfindung vorläufiger Annäherungswerte für versuchweises Rechnen ist die graphische Interpolation deshalb von grosser Bedeutung, auch da, wo das eigentliche Lösen der Aufgabe durch Berechnung geschehen muss. Ihre schwache Seite ist ihre sehr begrenzte Genauigkeit, weswegen sie nicht für jedweden Gebrauch unbedingt empfehlenswert ist.

Viel mehr als 3 bedeutende Ziffern bekommt man nicht durch graphische Interpolation bestimmt, und auch so weit gelangen wir nur in günstigen Fällen, wo besonders die Krümmungen der Kurve klein und regulär sind, und wo die Kurve mit der Achse des Argumentes einigermassen parallel verläuft. Es hilft nicht, dass man die Interpolationskurve nach grossem Massstab zeichnet; dadurch geht die Übersichtlichkeit der Figur verloren; man darf im Gegenteil nie den Massstab grösser anwenden, als dass das Auge ein gesammeltes Bild von allem Wesentlichen der Figur haben kann.

Nur durch Kombination von graphischer und rechnender Interpolation kann man in wirklich schwierigen Fällen sowohl einen hohen Grad von Genauigkeit als auch Freiheit in den Hypothesen über die Funktionsform erreichen, die sich in jeder der Methoden der Interpolationsrechnung verstecken, besonders wenn die Rechnung mit einer begrenzten Anzahl von Gliedern in ihrer Reihenentwickelung angewandt werden soll. Ausser der hier angedeuteten Weise, wo die graphische Interpolation vorausgeht und den Weg zeigt, auf dem sich die Interpolation nach

der Methode Newtons und nach anderen Methoden durchrechnen lässt, kann man auch umgekehrt graphische Interpolation auf ein nicht völlig genügendes Interpolationsrechnen folgen lassen. Oder man kann sich durch wechselnden Gebrauch von graphischer und rechnender Interpolation allmählich der Wahrheit nähern. Dies ist besonders zu empfehlen, wenn von dem Umsatz einer Reihe von Beobachtungen in eine empirische Interpolationsformel die Rede ist.

Hat man sich in einem solchen Falle für die Anwendung entweder der Newtonschen Formel oder vielleicht reziproker Differenzen oder einer anderen Methode bestimmt, etwa in dieser Wahl eben durch direkte graphische Interpolation geleitet, wird man unter den Beobachtungen eine passende kleinere Anzahl auswählen, und in einer Tafel derselben für die sämtlichen, den übersprungenen Beobachtungen entsprechenden, Argumente numerisch interpoliren. Kann man nicht gleich eine so grosse Übereinstimmung der so interpolirten mit den beobachteten Werten erreichen, dass ein Ausgleichungsrechnen den Abschluss bilden kann, muss man eine Tafel der Differenzen der sämtlichen beobachteten Werte gegen die zu denselben Argumenten interpolirten Werte herstellen. Die Aufgabe wird dadurch so gestellt, dass es sich nun um das Interpoliren in dieser Differenzentafel handelt; hat man dadurch erreicht, dass alle Differenzen (Beobachtung — Rechnen) so klein sind, dass jede von ihnen höchstens 3 bedeutende Ziffern hat, dann kann eine graphische Interpolation (oder Ausgleichung) den Abschluss bilden. Das Diagramm, welches man mit diesen Restfehlern als Funktion von den Argumenten der Beobachtungen zeichnet, giebt zwar kein einfaches Bild von dem Verlauf der beobachteten Funktion. Es kann aber nach hinlänglich kleinem Massstab gezeichnet werden, so dass das Auge das Ganze überblicken kann, und die Krümmungen der Kurve sind in der Regel stark verkleinert und lassen die Kurve als eine Wellenlinie längs der Abscissenachse laufen. Diese giebt nun nicht nur die Argumente an, sondern vertritt zugleich die Werte des vorhergehenden Interpolationsrechnens, und sie wird die Kurve in allen Punkten schneiden, deren Argumente während des vorbereitenden Interpolationsrechnens benutzt worden sind.

Ist nun nur Interpolation für gewisse bestimmte Argumente nötig, kann dieselbe gleich ausgeführt werden, indem man für jedes dieser Argumente sowohl durch Rechnen in der ersterwähnten Tafel als auch graphisch auf dem Fehler-Diagramm interpolirt und diese beiden Interpolationsresultate addirt. Auch bei numerischen Differentiationen und Integrationen kann das Resultat als eine Summe zweier Resultate dargestellt werden, eins für die berechnete Tafel und ein graphisch bestimmtes für deren Fehler. Zu diesem letzteren kann die Konstruktion von Tangentenwinkeln und das Ausmessen von Arealen zwischen der Kurve und ihrer Abscissenachse angewandt werden.

Ist das Ziel aber, eine Interpolations-Formel an die Stelle der Tafel zu setzen, muss man ein neues Interpolationsrechnen versuchen; dieses hat nun grössere Aussicht zu gelingen, weil die Argumente-Auswahl nicht mehr an das in der vorliegenden Tafel Vorhandene gebunden ist, sondern nur das Zweckmässige in Frage zu kommen braucht. Es lässt sich nun auch besser eine Ansicht darüber bilden, wie viele Glieder in der Interpolationsformel nötig sind.

Sollen in derselben n Konstanten bestimmt werden, wählt man eben n Argumente, die entweder gleich grosse Intervalle haben oder zu Anfang und Schluss der Tafel oder an den sonst für notwendig erachteten Stellen dichter gesammelt sind, z. B. um den uneigentlichen Abnormitäten entgegenzuwirken, wo auf die Einzelheiten mehr Gewicht gelegt wird. Für jedes der n ausgewählten Argumente verschafft man sich dann die Funktionswerte durch die graphische Interpolation, eventuell durch die Addition derselben zu dem Resultate der vorhergehenden numerischen Interpolation.

§ 35.

Eine sehr wichtige Art von uneigentlicher Abnormität kommt bei solchen Funktionen vor, in die exponentielle oder periodische Glieder mit ganzen Funktionen als Koeffizienten eingehen, also bei den rekurrenten Funktionen, die wir als Nulleinheiten in dem symbolischen Teil der Interpolationsrechnung besprochen haben. Bei diesen ist nie von eigentlicher Abnormität die Rede und mit hinlänglich kleinen Intervallen wird für rekurrente Funktionen Newtonsche Interpolation immer konvergent. Sind aber in der gegebenen Tafel die Intervalle gross, können die Schwierigkeiten sehr bedeutend werden, und ebenfalls, wenn die Aufgabe ist, eine Interpolationsformel mit der möglich kleinsten Anzahl von empirisch bestimmten Konstanten herzustellen. Hier macht es einen sehr fühlbaren Unterschied, ob die Tafel unregelmässig verteilte oder äquidistante Argumente hat. Im ersteren Falle wachsen leicht die Schwierigkeiten ins Unüberwindliche; im letzteren ist das in den Paragraphen 22—23 über diese symbolischen Nulleinheiten Gelernte vorteilhaft anzuwenden.

Wenn die Form der Funktion wie in (66)

$$R(x) = \Sigma f_{\alpha-1}(x)\, a^x + \Sigma(c_{\rho-1}(x)\cos vx + s_{\rho-1}(x)\sin vx)\, r^x \tag{141}$$

ist, wo die Faktoren von a^x, $\cos vx$ und $\sin vx$ ganze Funktionen von den als Indices angegebenen Graden $\alpha-1$ und $\rho-1$ sind, entspricht derselben, infolge (67), ein symbolischer Nullfaktor

$$\Phi = (E-a)^\alpha \circ (E-b)^\beta \circ \ldots \circ (E^2 - 2r\cos v \cdot E + r^2)^\rho\,, \tag{142}$$

der immer in die ganze Form (69)

$$\Phi = E^n + k_1 E^{n-1} + \ldots + k_{n-1} E + k_n \tag{143}$$

gebracht werden kann, wo $n = \Sigma\alpha + 2\Sigma\rho$ ist, und wo $k_1, \ldots, k_n$ konstant sind. Die Wurzeln in $\Phi = 0$ sind die reellen Zahlen a (α-mal), b (β-mal) und die komplexen Wurzelpaare $re^{\pm iv}$ (die ρ-mal vorkommen). Diese Konstanten einer unbekannten $R(x)$-Funktion wird man also bestimmen können, sobald man die Koeffizienten $k_1, \ldots, k_n$ der Rekursionsformel

$$\Phi \circ R(x) = R(x+n) + k_1 R(x+n-1) + \ldots + k_{n-1} R(x+1) + k_n R(x) = 0 \tag{144}$$

kennt. Wenn aber die gegebene Tafel der $R(x)$-Funktion äquidistant ist, kann man, indem man das Argumentintervall als Einheit nimmt, aus dieser Tafel ein System von n linearen Gleichungen hinschreiben. Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} R(3) + k_1 R(2) + k_2 R(1) + k_3 R(0) = 0 \\ R(4) + k_1 R(3) + k_2 R(2) + k_3 R(1) = 0 \\ R(5) + k_1 R(4) + k_2 R(3) + k_3 R(2) = 0 \end{array}\right\} \tag{145}$$

Durch das Lösen eines solchen Systems von Gleichungen kann man also die Koeffizienten der erwähnten Gleichung des n^{ten} Grades der Gestalt $\Phi = 0$ finden, wo Φ die in (143) gegebene symbolische Form hat. Wenn diese in allen ihren Wurzeln gelöst ist, bleiben indessen noch die unbekannten Konstanten in dem Ausdruck für $R(x)$ zu bestimmen, die sich in den ganzen Funktionszeichen $f_{\alpha-1}(x)$, $c_{\rho-1}(x)$ und $s_{\rho-1}(x)$ verstecken. Die Anzahl dieser Konstanten ist nun wieder n, aber auch diese können durch n lineare Gleichungen von der Gestalt (66) oder (141) gefunden werden, wo jetzt die Werte von

$$a^x,\ xa^x,\ x^2a^x,\ \ldots,\ r^x \ \text{und}\ \cos vx,\ x\cos vx,\ \ldots,\ \sin vx,\ x\sin vx,\ \ldots$$

für n unter den Tafelargumenten berechnet, die bekannten Koeffizienten abgeben.

Diese ganze Arbeit ist keineswegs unbedeutend, besonders da der Grad n nicht im voraus bekannt ist. Dabei muss man, wenn die Tafelwerte abgerundet oder beobachtet sind, damit rechnen, dass die Genauigkeit, besonders während der Elimination im ersten Abschnitte des Rechnens, schwindet, so dass die Koeffizienten $k_1, \ldots, k_n$ in der Gleichung des n^{ten} Grades oft mit grossen mittleren Fehlern behaftet sind. Die Ungenauigkeit wird dann auf die Wurzeln dieser Gleichung, die Grundzahlen der Exponentialfunktionen übertragen, und nähern sich diese untereinander der gleichen Grösse, wird die Unsicherheit durch die den Vielfältigkeits-Wurzeln eigentümliche Unbestimmtheit vergrössert. Formell wird die Unbestimmtheit in dem dritten und letzten Teil der Rechnung wieder gehoben. Die Koeffizienten der Exponentialfunktionen können dadurch so bestimmt werden, dass die Interpolationsformel gezwungen wird mit den sämtlichen $2n$ benutzten Tafelangaben

übereinzustimmen; reell kommt aber die Unsicherheit wieder zum Vorschein, wenn die Rekursionsformel zu Extrapolation über diese Angaben hinaus benutzt wird. Wird die Unbestimmtheit einigermassen total, muss man den Gleichungsgrad n herabsetzen, folglich einige Glieder der Interpolationsformel auslassen und sich in das Unvermeidliche fügen, dass eine entsprechende Anzahl von Tafelangaben nicht genau wiedergegeben wird, so dass vielleicht der Versuch mit einem anderen Satz von äquidistanten Tafelwerten wiederholt werden muss, oder dass man zu einer Ausgleichung schreiten muss.

§ 36.

Beabsichtigt man dagegen nicht, die streng wahre Form der Funktion abzuleiten, sondern nur eine uneigentliche, die Interpolation verhindernde Abnormität zu überwinden, oder eine praktisch brauchbare Interpolationsformel darzustellen, wird man sich häufig mit ganz wenigen exponentiellen oder periodischen Gliedern und sogar mit nur annähernder Bestimmung derselben begnügen können.

Falls sich nur die in der Differenzentafel am hervortretendsten Exponentialfunktionen abstumpfen und die steilsten Wellen von kurz-periodischen Funktionen ausglätten lassen, dann ist durch gewöhnliche Interpolation nach der Formel Newtons oft das Fehlende zu erreichen.

Hier können wir eine rudimentäre Interpolationsrechnung und zwar mit Differenzen, welche wir qualifizirte nennen werden, anwenden.

Das Resultat der symbolischen Operation $E-a$ auf eine Funktion nennen wir die *durch a qualifizirte Differenz der 1^{sten} Ordnung* oder kurz eine *einzelne a-Differenz*, und wir bezeichnen sie

$$(E-a) \circ f(x) = f(x+1) - af(x).$$

Eine qualifizirte Differenz der 2^{ten} Ordnung ist das Resultat der Operation

$$[E^2 - 2cbE + b^2] \circ f(x) = f(x+2) - 2cbf(x+1) + b^2 f(x).$$

Unsere allgemeine Rekursionsformel (14~~3~~4) ist eine qualifizirte Differenz der n^{ten} Ordnung.

Man kann eine Tafel für eine rekurrente Funktion mit einem System von qualifizirten Differenzen, welche gegebenen Qualifikationsfaktoren entsprechen, versehen, völlig unseren gewöhnlichen Differenzenschemata entsprechend. Die qualifizirten Differenzen, die man in jeder Ordnung erhält, können als äquidistante Tafeln abgeleiteter Funktionen aufgefasst werden, und sie können deshalb ferneren qualifizirten Differenz-Operationen unterworfen werden, sowohl mit den früher angewandten als mit anderen Qualifikationsfaktoren. Benutzt man als solche die

richtigen Grundzahlen für die Exponentialfunktionen der Glieder der Funktion, wird man für jede Ordnung von Differenzen, die man bildet, infolge § 23 sehen, dass die rekurrente Funktion eines ihrer exponentiellen Glieder mit dem letzten Qualifikationsfaktor als Grundzahl verliert, während die übrigen Glieder ihre Form beibehalten, die Koeffizienten jedoch verändert werden. Zuletzt kann man also auch hier die sämtlichen Differenzen der höchsten Ordnung verschwinden sehen. Die sich dabei eröffnende Möglichkeit, ein solches Schema direkt zu Interpolation für willkürliche Argumente anzuwenden, wollen wir nicht zu verwirklichen suchen. Die Extrapolation zu den folgenden äquidistanten Argumenten ist nur eine andere Form von Berechnung durch Rekursion. Wie gesagt brauchen wir hier nur ein Rudiment dieser verallgemeinerten Interpolationsrechnung.

Was uns interessirt, ist nur, dass man mittelst Bildung von Schemata mit qualifizirten Differenzen feststellen kann, welche Exponentialfunktionen oder periodische Funktionen gegebenen Falles uneigentliche Abnormitäten bewirken, und nachher durch ihre Beseitigung die Interpolation ermöglichen.

Dazu bedürfen wir aber über das in den Paragraphen 22, 23 und 35 Gesagte hinaus, einer allgemeinen Bestimmung der Wirkung dieser Operationen auf eine Funktion (oder auf ein Glied einer solchen), die eine Exponentialfunktion als Faktor hat. Dabei muss nicht nur die Wirkung von $(E-a)^n$, sondern auch die der umgekehrten Operation $(E-a)^{-n}$ auf Glieder mit dem Exponentialfaktor b^x erörtert werden. Der folgende symbolische Satz kann uns in dieser Beziehung das Gesuchte bringen.

Man hat identisch

$$(E-a) \circ f(x)\, b^x = \{(bE-a) \circ f(x)\} b^x, \tag{146}$$

wobei das gleichzeitige Vorkommen von symbolischer und gewöhnlicher Multiplikation beachtet werden muss.

Hieraus folgt

$$(E-a)^n \circ f(x)\, b^x = \{(bE-a)^n \circ f(x)\} b^x \tag{147}$$

mit Gültigkeit für alle ganzen, sowohl negativen als positiven Werte von n.

Durch die Entwickelung von $(bE-a)^n$ nach der Binomialformel erhält man den Faktor von b^x als lineare Funktion der Tafelwerte für $f(x)$, nämlich

$$b^n f(x+n) - \frac{n}{1} a b^{n-1} f(x+n-1) + \ldots \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b f(x+1) \mp a^n f(x).$$

Wenn n negativ ist, wird diese Reihe unendlich; unanwendbar aber, wenn ausserdem a und b ungefähr gleich gross sind — und letzterwähnter Fall ist für unsere Anwendungen eben von grösstem Interesse. Grössere Bedeutung hat des-

halb die einfache Umschreibung von (147)

$$\left.\begin{aligned}&(E-a)^n \circ f(x)b^x = \{(b-a+b(E-1))^n \circ f(x)\}b^x = \\ &= b^x\{(b-a)^n + \tfrac{n}{1}(b-a)^{n-1}b\diagdown + \ldots + \tfrac{n}{1}(b-a)b^{n-1}\diagdown^{n-1} + b^n\diagdown^n\} \circ f(x).\end{aligned}\right\} \quad (148)$$

In der Entwickelung nach der Binomialformel enthält also jedes Glied seine einfache Differenz auf absteigender Schräglinie der ursprünglichen Faktorfunktion. Wenn wir: $(E-a)^n \circ f(x)b^x = F(x)\cdot b^x$ schreiben, sind wir jetzt imstande, die Funktion $F(x)$ von $f(x)$ und umgekehrt abzuleiten.

Ist die Faktor-Funktion $f(x)$ in (148) konstant, ihre Differenzen also $= 0$, bewirkt $(E-a)^n$ nur die Multiplikation mit dem konstanten $(b-a)^n$. Ist $f(x)$ eine endliche ganze Funktion, wird die Reihe auch endlich, sowohl für positives als für negatives n. Im letzteren Falle kann ein arbiträrer Addend hinzugefügt werden; durch die Auslassung desselben giebt man der Tafel-Funktion, insofern sie von qualifizirten Differenzen abgeleitet wird, eine Form, welche sie in den mit b^x multiplizirten Gliedern haben k a n n. Eine Subtraktion dieser Werte von den aufgegebenen muss entscheiden, ob Glieder mit der Exponentialfunktion a^x als Faktor hinzugefügt werden sollen.

Ist $b = a$, und ist n positiv, wird die Faktor-Funktion durch ihre n^{ten} Differenzen ersetzt oder verschwindet mit diesen, wenn n gross genug ist; ist n negativ, wird (148) unbestimmt. Bei qualifizirten Differenzen mit der Grundzahl der Exponentialfunktion selbst, kann man nur feststellen, dass diese richtig gefunden ist; um die Koeffizienten der Faktor-Funktion zu bestimmen, muss man a^x hinwegdividiren.

Ist die Differenz $b-a$ so klein, dass ihre höheren Potenzen bald verschwinden, wird die Gliederanzahl der Reihe für positives n reduzirt. Hat man also einer uneigentlichen durch ein exponentielles Glied cb^x entstandenen Abnormität gegenüber einen nicht ganz richtigen Wert für die Grundzahl der Exponentialfunktion berechnet oder gemutmasst, und statt b die Grundzahl als a angesetzt sowie diesen Faktor in den qualifizirten Differenzen angewandt, erreicht man zwar nicht, dass die Abnormität sogleich verschwindet, wohl aber, dass sie vermindert wird, und in den wiederholten a-Differenzen verschwindet sie; ganz, wie es gegangen wäre, wenn das schädliche Glied nicht cb^x, sondern $cf(x)a^x$ gewesen wäre, wo $f(x)$ selbstverständlich dann die Reihenentwickelung für $\left(\frac{b}{a}\right)^x$ sein müsste. Glieder mit Exponentialfunktionen, deren Grundzahlen von 1 nur wenig verschieden sind, können ganz einfach durch die Formel Newtons interpolirt werden; dies ist jetzt so zu verstehen, dass man in solchen Fällen nicht qualifizirte, sondern nur einfache Differenzen nötig hat.

Obgleich (148) in unveränderter Form, bisweilen sogar sehr vorteilhaft angewandt werden kann, muss man es sich zur Regel machen vor Anwendung dieser Formel, die Funktion $f(x)$ in die Potenzreihe $\Sigma c_n x^n$ zu entwickeln. Die explizite Gestalt des Resultates ist dann

$$
\left.
\begin{array}{l}
(E-a)^n \circ (c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6)b^x = \\[6pt]
= \left\{ \begin{array}{r}
c_0\,(b-a)^n \quad + \\
+n\,(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)(b-a)^{n-1}b + \\
+n(n-1)\,(1c_2+3c_3+7c_4+15c_5+31c_6)(b-a)^{n-2}b^2 + \\
+n(n-1)(n-2)\,(1c_3+6c_4+25c_5+90c_6)(b-a)^{n-3}b^3 + \\
+n(n-1)(n-2)(n-3)(1c_4+10c_5+65c_6)(b-a)^{n-4}b^4 + \\
+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(1c_5+15c_6)(b-a)^{n-5}b^5 + \\
+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\cdot c_6 \cdot (b-a)^{n-6}b^6
\end{array} \right\} b^x + \\[6pt]
+ \left\{ \begin{array}{r}
c_1\,(b-a)^n \quad + \\
+n\,(2c_2+3c_3+4c_4+5c_5+6c_6)(b-a)^{n-1}b + \\
+n(n-1)(3c_3+12c_4+35c_5+90c_6)(b-a)^{n-2}b^2 + \\
+n(n-1)(n-2)\,(4c_4+30c_5+150c_6)(b-a)^{n-3}b^3 + \\
+n(n-1)(n-2)(n-3)\,(5c_5+60c_6)(b-a)^{n-4}b^4 + \\
+n(n-1)(n-2)(n-3)\,(n-4)\,(6c_6)(b-a)^{n-5}b^5
\end{array} \right\} x b^x + \\[6pt]
+ \left\{ \begin{array}{r}
c_2\,(b-a)^n + \\
+n\,(3c_3+6c_4+10c_5+15c_6)(b-a)^{n-1}b + \\
+n(n-1)\,(6c_4+30c_5+105c_6)(b-a)^{n-2}b^2 + \\
+n(n-1)(n-2)(10c_5+90c_6)(b-a)^{n-3}b^3 + \\
+n(n-1)(n-2)\,(n-3)\,(15c_6)(b-a)^{n-4}b^4
\end{array} \right\} x^2 b^x + \\[6pt]
+ \left\{ \begin{array}{r}
c_3\,(b-a)^n + \\
+n(4c_4+10c_5+20c_6)(b-a)^{n-1}b + \\
+n(n-1)(10c_5+60c_6)(b-a)^{n-2}b^2 + \\
+n(n-1)(n-2)(20c_6)(b-a)^{n-3}b^3
\end{array} \right\} x^3 b^x + \\[6pt]
+ \left\{ \begin{array}{r}
c_4\,(b-a)^n + \\
+n(5c_5+15c_6)\,(b-a)^{n-1}b + \\
+n(n-1)(15c_6)(b-a)^{n-2}b^2 +
\end{array} \right\} x^4 b^x + \\[6pt]
+ \left\{ \begin{array}{r}
c_5\,(b-a)^n + \\
+n\cdot 6c_6 \cdot (b-a)^{n-1}b +
\end{array} \right\} x^5 b^x + \\
\qquad + c_6\,(b-a)^n x^6\, b^x
\end{array}
\right\} \quad (149)
$$

Hieraus ergiebt sich das Gesetz der Reihenentwickelung zur Genüge, wobei betreffs der numerischen Koeffizienten auf die Stirlingschen Zahlen $\overset{m}{III}(p)$ (Pg. 32)

verwiesen werden kann, welche hier nur mit Binomialkoeffizienten multiplizirt vorkommen.

Für qualifizirte Differenzen höherer Ordnung ist es gleichgültig, nach welcher Reihenfolge die verschiedenen niedrigeren qualifizirten Differenzen berechnet sind.

Diese Sätze über qualifizirte Differenzen genügen für die Anwendungen, welche die grösste Bedeutung haben, und welche wir durch die Beispiele in diesem und im nächsten Paragraphen beleuchten werden. Wir denken uns Angesichts von Tafeln mit exponentieller oder periodischer uneigentlicher Abnormität. Wir werden erstens zeigen, wie man durch Versuche mit qualifizirten Differenzen die Schwierigkeiten rekognosziren und wie man annäherungsweise — oder sogar wie in den Beispielen — exakt die Natur der Abnormität aufklären kann; und zweitens werden wir die hier aufgestellten Sätze zur Ausscheidung der Abnormitäten herbeiführenden Glieder der Tafelfunktion brauchen, so dass alsdann die Interpolation mittelst einfacher Differenzen gelingen kann. Die Freiheit, mit der wir bei der Entwickelung des Schemas für qualifizirte Differenzen die Ordnung der symbolischen Faktoren verändern können, hat für unsere Aufgabe der Rekognoszirung grosse Bedeutung. Wegen des zweiten Teils der Aufgabe aber ist es am vorteilhaftesten, alle mit demselben Faktor qualifizirten Differenzen unmittelbar aufeinander folgen zu lassen, und empfehlenswert ist es, sich zur Regel zu machen, mit der Bildung einfacher Differenzen von hinlänglich hoher Ordnung anzufangen und in den höchsten Ordnungen qualifizirter Differenzen mit allen denjenigen abzuschliessen, deren Grundzahlen am meisten von der Einheit abweichen. Auf diese Weise erreicht man nämlich, dass die gefährlichste Exponentialfunktion isolirt wird, so dass man ihre Form $f(x)a^x$ mit allen in $f(x)$ eventuell eingegangenen Koeffizienten definitiv bestimmt erhalten kann. In dem Differenzenschema muss dabei die Aufmerksamkeit auf die Spalte der höchsten Ordnung mit entweder einfachen oder durch andere Faktoren als a berechneten qualifizirten Differenzen gerichtet werden, welche jetzt die einfache Form $F(x)a^x$ ohne andere Glieder haben muss; indem man diese Spalte durch a^x dividirt, wird $F(x)$ durch einfache Differenzen oder durch Reihenentwickelung bestimmt, und die Formeln (148) oder (149) können dann durch Rechnung mit negativem n die Form der mit a^x multiplizirten ganzen Funktion oder Konstante $f(x)$ in den abnormen Gliedern der vorliegenden Tafelfunktion bestimmen. Durch die Subtraktion von $f(x)a^x$ wird dann die Tafel von dieser Abnormität befreit.

B e i s p i e l. Eine Funktion $R(x)$, deren recht starke uneigentliche Abnormität sich bei dem Betrachten der folgenden Tafel, besonders auf Zeile mit den Argumenten 0 und 14, unmittelbar zu erkennen giebt, soll zu Interpolation zugänglich gemacht werden.

x	$R(x)$	$(E-1)^3 \circ R(x)$	$(E-\frac{1}{2}) \circ (E-1)^3 \circ R(x)$	$(E-\frac{1}{2})^2 \circ (E-1)^3 \circ R(x)$
0	9	1 023 992	— 51 220	— 50
1	1 814 286	460 776	— 25 660	— 150
2	1 999 903	204 728	— 12 980	— 450
3	1 580 852	89 384	— 6 940	— 1 350
4	1 017 909	37 752	— 4 820	— 4 050
5	515 802	14 056	— 6 460	— 12 150
6	163 915	568	— 15 380	— 36 450
7	0	— 15 096	— 44 140	—109 350
8	38 113	— 51 688	— 131 420	—328 050
9	278 822	— 157 264	— 393 760	—984 150
10	707 031	— 472 392	—1 181 030	
11	1 271 052	—1 417 226		
12	1 813 621			
13	1 862 346			
14	1			

Von dem Differenzensystem ist hier nur die 3te einfache, die 4te und die 5te qualifizirte Differenzenspalte angegeben. In der ersteren ist die ganze algebraische Funktion die den Zusammenhang verschleiert, so weit beseitigt, dass man sich über die Art der Abnormität eine Ansicht bilden kann. Man könnte hier an eine hyperbolische Cosinusfunktion — z. B. $a(2{\cdot}7)^x + b(2{\cdot}7)^{-x}$ — denken; diese Möglichkeit zu untersuchen, empfehlen wir dem Leser. Hier ist zweimal mit qualifizirten Differenzen mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ operirt; die daraus hervorgegangene 5te qualifizirte Differenzenspalte zeigt mit aller wünschenswerten Klarheit, dass die Funktion dieser Spalte $-50 \cdot 3^x$ ist. Man sieht schon hierdurch, dass die Funktion $R(x)$ eine Nulleinheit ist, deren Nullfaktor $(E-1)^3 (2E-1)^2 (E-3)$ ist. Und die Rekursionsformel ist

$$0 = (4E^6 - 28E^5 + 73E^4 - 94E^3 + 64E^2 - 22E + 3) \circ R(x).$$

Eine der Abnormitäten von $R(x)$ ist also gefunden; die andere muss die Form $(\alpha + \beta x) 2^{-x}$ haben. Um α und β zu finden, müssen wir erst die Spalte der 3ten Differenz von der ersten Abnormität befreien. Mit $n = -2$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ und $c_0 = -50$ finden wir infolge (149) das Glied $-8 \cdot 3^x$. Die Subtraktion der Werte dieser Funktion von der 3ten Differenz offenbart sogleich, dass diese 3te Differenz in ihrer Ganzheit die Form

$$102\,400\,(10-x)(2^{-x}) - 8 \cdot 3^x$$

hat. Um die beiden entsprechenden Glieder der vorgelegten Tafelfunktion zu finden, müssen wir also in (149) $n' = -3$, $a' = 1$, und teils $b' = \frac{1}{2}$, $c'_0 = 10$, $c'_1 = -1$, teils $b'' = 3$ und $c''_0 = -8$ setzen. Die Summe der beiden Abnormitätsglieder ist demzufolge

$$819\,200\,(x-7)\,2^{-x} - 3^x.$$

Subtrahirt man von der vorgelegten Tafel die Werte dieser Glieder, verschwinden die Abnormitäten ganz, und die Interpolation fordert jetzt nur, dass man auf eine konstante zweite Differenz Rücksicht nimmt.

§ 37.

Wenn man mit Abnormitäten der Formen

$$c_{\rho-1} \cos vx \cdot r^x \quad \text{und} \quad s_{\rho-1} \sin vx \cdot r^x$$

zu tun hat (siehe (141)) und endliche periodische Funktionen mit exponentiellen und ganzen Faktor-Funktionen multiplizirt vorkommen, müsste man mit komplexen Zahlen rechnen, wenn man sie nach dem vorigen Paragraphen mit qualifizirten Differenzen der 1sten Ordnung behandeln wollte. Für die wirkliche Ausführung muss man symbolische Faktoren des 2ten Grades wie das letzte Glied in (142) anwenden, also qualifizirte Differenzen der zweiten Ordnung direkt bilden. Im § 36 liegt für die Entwickelung von diesbezüglichen Formeln hinlängliches vor, aber ihre allgemeinen Formen sind recht zusammengesetzt. Hier soll nur der sehr wichtige spezielle Fall erwähnt werden, wo die periodischen Glieder weder exponentielle noch ganze Funktionen als Faktoren für $\cos vx$ und $\sin vx$ haben, «die harmonische Analyse». Hier stellt sich die Aufgabe, die einzelnen Glieder einer in Tafelform gegebenen periodischen Funktion $\Sigma c_n \cos(C_n + V_n \cdot x)$ zu isoliren, zu bestimmen und zu beseitigen.

Das Mittel dazu müssen qualifizirte Doppeldifferenzen abgeben, deren Form am besten geschrieben wird

$$E - 2a + E^{-1} = \boxed{a}.$$

Der allgemeine Satz ist

$$\boxed{a} \circ c \cdot \cos(C + Vx) = 2(\cos V - a) \cdot c \cdot \cos(C + Vx). \tag{150}$$

Wenn $a = \cos v$ ist, wird man also durch eine einzige dieser Operationen ein Glied der periodischen Funktion in der Doppeldifferenz zum Verschwinden bringen. Ist a nur annäherungsweise $= \cos v$, werden Wiederholungen der Operation nötig sein. Die Konstanten V hängen nur von der Periodenlänge, P, der entsprechenden Glieder ab, und $V = \frac{2\pi}{P}$.

Sobald ein Glied einer endlichen periodischen Funktion sich so viel über die anderen erhebt, dass man durch Zählen der Wellen in der Tafel seine Periodenlänge bestimmen kann, kann man durch Berechnung des entsprechenden $a = \cos\frac{2\pi}{P}$ und durch Operiren mit dem Symbol $\boxed{a}$ seinen Einfluss auf diese qualifizirten Doppel-Differenzen verkleinern oder aufheben. Hat die Funktion mehrere Glieder mit ungefähr derselben Periodenlänge, werden alle diese durch dieselbe Operation verkleinert werden und durch ihre Wiederholung weiter abnehmen. Glieder mit

sehr verschiedener Periodenlänge werden dagegen stehen bleiben oder, wenn $2\left(\cos\frac{2\pi}{p}-a\right)>1$, sogar vergrössert werden, so dass man sie und ihre Periodenlängen durch die Anzahl ihrer Wellen in den qualifizirten Differenzen der Tafel, welche in der höchsten Ordnung zurückbleiben, wird erkennen und berechnen können.

Auf diese Weise kann man, durch die Beseitigung einer (nicht allzu grossen) Anzahl von periodischen Gliedern, allmählich so weit gelangen, dass nur ein einzelnes Glied in der höchsten Doppel-Differenz isolirt zurückbleibt. Dass man diesen Zweck erreicht hat, kann daran erkannt werden, dass die Spalte der letzten und die der vorletzten Doppeldifferenz durch die ganze Tafel proportional erscheinen. Da man in dem Verhältnis $2\left(\cos\frac{2\pi}{P}-a\right)$ a kennt, kann man daraus die Periodenlänge P des Restgliedes berechnen und diese prüfen (eventuell verbessern), so dass eine fernere Doppel-Differenz $\boxed{\cos\frac{2\pi}{P}}$ keinen Rest von Bedeutung hinterlässt. Alsdann kann man durch Multiplikation mit $\left(2\left(\cos\frac{2\pi}{P}-a\right)\right)^{-n}$ den Einfluss des gefundenen Gliedes auf die Differenzen niedrigerer Ordnung und die Tafelwerte berechnen und zu allmählicher Bestimmung der Periodenlängen für die übrigen Glieder und zu der des Einflusses jedes dieser Glieder auf die Tafeldifferenzen schreiten. Diese Methode ist dem Akte analog, wodurch das musikalische Ohr die einzelnen Töne eines Akkordes erkennt.

In Fällen, wo mehrere Glieder fast dieselbe Periodenlänge haben, lässt unsere Methode uns im Stiche, indem die genaue und konstante Proportionalität der Differenzenspalten dann nicht eintritt. Man muss in dem Falle die Methode des § 35 anwenden; diese wird aber hier weit einfacher, da die Rekursionsformel nur für die höchste Differenz zu bestimmen ist, und da ihre Koeffizienten symmetrisch sind. Ist z. B. die Rede nur davon, zwei periodische Nachbarglieder zu unterscheiden, zeigt

$$(E-\alpha+E^{-1})\circ(E-\beta+E^{-1}) = E^2-(\alpha+\beta)E+(2+\alpha\beta)+(\alpha+\beta)E^{-1}+E^{-2} \quad (151)$$

dass man mit 6 äquidistanten Tafelwerten

$$\left.\begin{aligned} R(0)+2R(2)+R(4)-(\alpha+\beta)(R(1)+R(3))+\alpha\beta R(2) &= 0 \\ R(1)+2R(3)+R(5)-(\alpha+\beta)(R(2)+R(4))+\alpha\beta R(3) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (152)$$

zur Berechnung von α und β als Wurzeln einer Gleichung des 2^{ten} Grades hat. Wenn hiermit die beiden Periodenlängen bekannt sind, kann man ja die 4 Koeffizienten der cos- und sin-Glieder wie im § 35 bestimmen; vorteilhafter dürfte es sein, die eine der beiden Periodenlängen durch Neubildung der entsprechenden Doppeldifferenz zu beseitigen. Man wird dann den Einfluss jedes Gliedes auf die Differenzen niedriger Ordnung wie sonst in diesem Paragraphen bestimmen können.

Kennt man die Periodenlänge oder V eines Gliedes der Form $\Phi(x)=c\cos(C+Vx)$, genügen zwei Tafelwerte dieses Gliedes für die Berechnung von c und C durch

$$\left.\begin{aligned} c\cos\left(C+\tfrac{1}{2}V+Vx\right) &= \left(\Phi(x)+\Phi(x+1)\right)\left(2\cos\tfrac{1}{2}V\right)^{-1} \\ c\sin\left(C+\tfrac{1}{2}V+Vx\right) &= \left(\Phi(x)-\Phi(x+1)\right)\left(2\sin\tfrac{1}{2}V\right)^{-1}. \end{aligned}\right| \qquad (153)$$

Enthält die Funktion ausser periodischen Gliedern auch exponentielle Glieder oder ganze Funktionen oder eine Konstante als Addenden, ist es zu empfehlen, erst diese letzteren Glieder durch die Bildung einfacher oder einfach-qualifizirter Differenzen zu beseitigen, ehe man die periodischen Glieder durch Doppel-Differenzen angreift. Bei der Ausscheidung der einzelnen Glieder kommt dann in Anwendung, dass

$$(E-a)\circ\cos(C+Vx) = (\cos V-a)\cos(C+Vx)-\sin V\cdot\sin(C+Vx).$$

Setzt man hier $\cos V-a = h\cos H$ und $\sin V = h\sin H$ sieht man, dass

$$(E-a)^n\circ\cos(C+Vx) = h^n\cos(C+nH+Vx) \quad (n \text{ ganz, positiv oder negativ}). \qquad (154)$$

Der Einfluss der periodischen Glieder auf Differenzen niedrigerer Ordnungen kann also durch blosse Multiplikationen mit konstantem Faktor hier nicht berechnet werden, sondern eine Bestimmung der Konstanten c und C ist zu Interpolation in den Cosinusfunktionen erforderlich.

Beispiel. In der umstehenden Tafel ist direkte Interpolation wenigstens sehr schwierig, weil die Differenzen höherer Ordnung durchschnittlich grösser als die niedriger Ordnung sind. Die Abnormität ist offenbar die Folge einer rasch schwingenden Periodizität. Eine andere Periodizität mit grossen Wellen von 11—12 Intervallen Periodenlänge verschleiert diese und ist, wo möglich, vor allen Dingen zu beseitigen. Da $2\cos\frac{2\pi}{11\cdot5} = 1\cdot7\ldots.$, wenden wir zu wiederholten Malen die Operation $\boxed{0\cdot85} = E-1\cdot7+E^{-1} = ◎$ dazu an.

Des Platzes wegen geben wir die Doppeldifferenzen in ganzen Zahlen an.

x	$f(x)$	$◎\circ f(x)$	$◎^2\circ f(x)$	$◎^3\circ f(x)$	$◎^4\circ f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$
0	4096	1229	—1679	2363	—3326	—848·31	4944·31
± 1	4096	205	— 246	346	— 487	—124·23	4220·23
± 2	3072	—1126	1608	—2262	3183	811·92	2260·08
± 3	0	— 512	717	—1009	1419	362·04	— 362·04
± 4	—3584	973	—1398	1967	—2767	—705·88	—2878·12
± 5	—5120	768	—1126	1585	—2230	—568·79	—4551·21
± 6	—4352	— 794	1068	—1502	2114	539·29	—4891·29
± 7	—3072	—1050	1439	—2025	2849	726·74	—3798·74
± 8	—1920	448	— 646	909	—1280	—326·43	—1593·57
± 9	256	1165	—1628	2291	—3224	—822·35	1078·35
±10	3520	— 96	170	— 238	335	85·57	3434.43
±11	5632	—1158	1678	—2361	3322	847·41	4784·59
±12	4896	— 196	322	— 453	637	162·63	4733·37

Schon in der ersten Doppeldifferenz ist der Einfluss der grossen Wellen von dem Gliede $f_2(x)$ so geschwächt, dass man sehen kann, dass die Periodenlänge des Abnormitäts-Gliedes $f_1(x)$ etwa 4·4 Intervalle ist. In der dritten und in der vierten Doppeldifferenz ist $f_2(x)$ ganz unmerkbar, so dass diese Spalten genau proportional scheinen. Ihr Verhältnis, $-1{\cdot}40710678 = 2\cos\frac{2\pi}{P_1} - 1{\cdot}7$. Deshalb muss $f_1(x)$ ein einfach periodisches Glied sein, und die Tafel darüber ergiebt sich durch die Multiplikation der 4ten Doppeldifferenz mit dem Faktor $\left(2\cos\frac{2\pi}{P_1} - 1{\cdot}7\right)^{-4} = {\cdot}25508894$. Durch $f(x) - f_1(x) = f_2(x)$ findet man $f_2(x)$.

Exakt ist
$$2\cos\frac{2\pi}{P} = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$$
und
$$f(x) = 2048\left\{(1+2^{\frac{1}{2}})\cos\frac{2\pi}{P_2} + (1-2^{\frac{1}{2}})\cos\frac{2\pi}{P_1}\right\}.$$

Aus den 6 ersten Tafelwerten findet man für (152)
$$\begin{aligned} f(0)+f(2) &= 7168 \\ f(1)+f(3) &= 4096 \\ f(2)+f(4) &= -512 \\ f(3)+f(5) &= -5120 \end{aligned}$$
also
$$\begin{aligned} 6656 - 4096(\alpha+\beta) + 3072\alpha\beta &= 0 \\ -1024 + 512(\alpha+\beta) &= 0 \end{aligned}$$
also
$$\alpha+\beta = 2, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2}.$$

Die Rekursionsformel ist mithin
$$\{2E^4 - 4E^3 + 5E^2 - 4E + 2\} \circ f(x) = 0.$$
Für α und β findet man die oben für $2\cos\frac{2\pi}{P}$ angegebenen Werte $1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

§ 38.

Wenn man die Newtonsche Interpolation ganz aufgeben muss, liegt es nahe sein Suchen an die in der Realität mit der Newtonschen identische Formel von Lagrange zu knüpfen, deren durchsichtigere Form zu einer Unendlichkeit von Umbildungen geradezu einzuladen scheint. Setzt man in der Formel von Lagrange (6),
$$X = \Sigma A \frac{(x-b)\ldots(x-d)}{(a-b)\ldots(a-d)},$$
für jede Differenz zwischen zwei Argumente p und q eine Funktion $f(p-q)$, welche die Bedingung $f(0) = 0$ erfüllt, dann erhält man eine verallgemeinerte Interpolationsformel

$$X = \Sigma A \frac{f(x-b)\ldots f(x-d)}{f(a-b)\ldots f(a-d)} = F(x). \tag{155}$$

Infolge dieser müssen nämlich $A = F(a)$, $B = F(b)$, ..., $D = F(d)$ alle mit den Tafelwerten übereinstimmen, von denen einer in jedes Glied der Formel eingeht, während ihre sämtlichen übrigen Glieder $= 0$ werden.

Eine Beschränkung ist doch zu machen: wenn $f(p-q)$ gleich 0 in anderen Weisen als durch $p = q$ werden kann, muss man bei der Wahl der bekannten Argumente der Interpolation beachten, dass keine Differenz zwischen einem Paar von diesen $f(p-q)$ gleich 0 und $F(x)$ unendlich oder unbestimmt macht.

Viele Abnormitäten können ohne Zweifel durch Interpolation nach (155) überwunden werden; man wird es aber als einen Mangel fühlen, dass der Zusammenhang zwischen den Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ sich nur wenig zu der Entscheidung eignet, wie man $f(x)$ wählen muss, um die Abnormitäten in $F(x)$ zu besiegen.

Das am nächsten liegende Beispiel ist $f(x) = \sin x$ zu setzen, und hier kann man sich sicher stellen, indem man die Tafel-Argumente in der Weise begrenzt, dass $0 \leqq x < \pi$. Durch die Entwickelung von $\sin(x-b)\ldots\sin(x-d)$ in

$$X = \Sigma A \frac{\sin(x-b)\ \ldots\ \sin(x-d)}{\sin(a-b)\ \ldots\ \sin(a-d)} \tag{156}$$

sieht man dann, dass X eine homogene ganze Funktion von $\sin x$ und $\cos x$, also eine rein periodische Funktion wird, doch nicht der allgemeine Fall mit Periodenlänge $= 2\pi$, sondern der eine oder der andere zweier spezieller Fälle.

Ist die Anzahl der Glieder und der gegebenen Argumente in (155) gerade, der Grad der homogenen Funktion folglich ungerade, wird man durch die Entwickelung von $F(x)$ nach multiplizirtem Bogen in Cosinus- und Sinus-Reihe zu der Form

$$X = c_1\cos(C_1 + x) + c_3\cos(C_3 + 3x) + \ldots + c_{2n-1}\cos\left(C_{2n-1} + (2n-1)x\right) + \ldots \tag{157}$$

geführt werden.

Die Funktion ist dann eine rein periodische Funktion mit der Periodenlänge $= 2\pi$. Sie stellt aber nicht den allgemeinen Fall von solchen dar, denn alle Glieder der Form $c_{2n}\cos(C_{2n} + 2n\pi)$ fehlen. Man sieht leicht, dass $X = \varphi(x) = -\varphi(x+\pi)$ für willkürliche x ist.

Ist aber die Anzahl der Glieder und der Argumente in (155) ungerade und der Grad der homogenen Funktion deshalb gerade, wird die Entwickelung nach multiplizirtem Bogen die Form.

$$X = c_0 + c_2\cos(C_2 + 2x) + \ldots + c_{2n}\cos(C_{2n} + 2nx) + \ldots \tag{158}$$

geben. Die Funktion ist in diesem Falle eine rein periodische Funktion. Ihre Periodenlänge reduzirt sich auf π. Und mit dieser kürzeren Periode stellt (158) den allgemeinen Fall dar.

Denkt man sich die Reihe ins Unendliche fortgesetzt, kann diese, die Fouriersche Reihe, zur Entwickelung jeder rein periodischen Funktion angewandt werden. Während der vorige Fall sich nur unter seltenen speziellen Verhältnissen zur Interpolation von Tafelfunktionen eignet, hat dieser letztere eine grosse Anwendbarkeit, fordert aber wegen dieses paradoxalen Verhältnisses überall, wo er zu Interpolation angewandt wird, eine ungerade Anzahl der gegebenen Tafelpositionen.

Die Anwendung von (156) setzt voraus, dass die Periodenlänge bekannt ist. Deren Bestimmung wird in der Regel keine Schwierigkeit mit sich führen. Bei den rein periodischen Funktionen, von denen hier allein die Rede ist, ist es nur erforderlich, dass die Intervalle irgendwo in der Tafel hinreichend klein sind, damit graphische Interpolation oder die Formel Newtons zu den indirekten Interpolationen angewandt werden kann. Durch diese müssen solche Argumente berechnet werden, die dieselben Funktionswerte haben, welche gewählte, fern liegende Argumente in der Tafel zeigen; alsdann ist es nur nötig, die dazwischenliegenden Perioden zählen zu können. Durch die Addition oder Subtraktion von Multipla der Periodenlänge aller Argumente der Tafel, wird die Tafel dazu umgebildet, nur eine einzige Periode zu umfassen; zugleich wird die Einheit der Argumente in der Weise verändert, dass die ganze Periodenlänge durch π oder 180° vertreten wird. Endlich wählt man, wenn die Tafel Überfluss hat, eine eben hinreichend grosse — ungerade — Anzahl von Tafelpositionen, die man möglichst gleichmässig über die ganze Periode zu verteilen sucht.

Ist es zu erreichen, dass die $2n+1$ Argumente Intervalle haben, welche alle genau $\frac{1}{2n+1}$ der Periode sind, kann man bedeutenden Vorteil daraus ziehen, die bekannten eleganten Sätze über die Konstant-Bestimmungen der Fourierschen Reihen, statt einer immer recht beschwerlichen eigentlichen Interpolationsrechnung anzuwenden.

Näher besehen ist (156) doch von Newtonscher Interpolation nicht radikal verschieden, sondern nur eine der im Anfange des § 33 erwähnten Transformationen. Das Rechnen wird vielleicht sogar durch eine solche Auffassung etwas erleichtert. Dividirt man die Gleichung (156) beiderseits mit $\cos^{2n} x$, und fasst man für alle, sowohl die bekannten als die gesuchten, Tafelpositionen tang r statt r als transformirtes Argument auf, dann geht (156) in die Lagrangesche Form (6) zurück. $\frac{X}{\cos^{2n} x}$ muss dann eine ganze rationale Funktion von tang x sein, und der Grad muss im Hauptfalle der $2n^{\text{te}}$ sein:

$$\frac{X}{\cos^{2n} x} = k_0 + k_1 \operatorname{tang} x + \ldots + k_{2n} \operatorname{tang}^{2n} x. \tag{159}$$

Die Newtonsche Form der Interpolation ist auch hier vorzuziehen, obgleich

sie hier einen ihrer sonstigen Vorzüge vor der Lagrangeschen Form eingebüsst hat. Wegen des Transformationsdivisors $\cos^{2n} x$ muss der Grad des Interpolationsversuches im Voraus angesetzt werden und darf während des ganzen Versuches nicht geändert werden. Auch wenn die dividirten Differenzen der beiden höchsten Ordnungen verschwindend klein ausfallen, müssen sie beibehalten und bis zum Schlusse strenge berücksichtigt werden.

Das Vorteilhafteste dürfte sein — wie beim Rechnen nach (156) — eine graphische Interpolation von X als Funktion von x vorauszuschicken, und hierdurch geleitet, den möglichst niedrigen Wert für $2n$ anzusetzen.

Ist der Grad der Interpolation bestimmt, wird man sehr häufig die Funktionsform durch die Konstanten der Fourierschen Reihe bestimmt wünschen. Eine Interpolation nach der Methode Newtons, für das Argument $\operatorname{tang} x = 0$ $2n$ mal wiederholt, wird dann die Konstanten k_0, k_1, ... k_{2n} in (159) bestimmen. Durch diese berechnet man die Konstanten der Fourierschen Reihe für X, indem man (159) mit $\cos^{2n} x$ multiplizirt. Die $2n+1$ Glieder werden dann alle von der Gestalt $k_m \sin^m x \cos^{(2n-m)} x$.

Speziell hat man für $n = 1$:

$$2X = k_1 \sin 2x + (k_0 - k_2) \cos 2x + k_0 + k_2. \tag{160}$$

für $n = 2$:

$$\left.\begin{aligned} 8X = {} & (k_1 - k_3) \sin 4x + (k_0 - k_2 + k_4) \cos 4x + \\ & + (2k_1 + 2k_3) \sin 2x + (4k_0 - 4k_4) \cos 2x + 3k_0 + k_2 + 3k_4. \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

für $n = 3$

$$\left.\begin{aligned} 32X = {} & (k_1 - k_3 + k_5) \sin 6x + (k_0 - k_2 + k_4 - k_6) \cos 6x + \\ & + (4k_1 - 4k_5) \sin 4x + (6k_0 - 2k_2 - 2k_4 + 6k_6) \cos 4x + \\ & + (5k_1 + 3k_3 + 5k_5) \sin 2x + (15k_0 + k_2 - k_4 - 15k_6) \cos 2x + \\ & \qquad + (10k_0 + 2k_2 + 2k_4 + 10k_6). \end{aligned}\right\} \tag{162}$$

für $n = 4$:

$$\left.\begin{aligned} 128X = {} & (k_1 - k_3 + k_5 - k_7) \sin 8x + \\ & + (6k_1 - 2k_3 - 2k_5 + 6k_7) \sin 6x + \\ & + (14k_1 + 2k_3 - 2k_5 - 14k_7) \sin 4x + \\ & + (14k_1 + 6k_3 + 6k_5 + 14k_7) \sin 2x + \\ & + (k_0 - k_2 + k_4 - k_6 + k_8) \cos 8x + \\ & + (8k_0 - 4k_2 + 4k_6 - 8k_8) \cos 6x + \\ & + (28k_0 - 4k_2 - 4k_4 - 4k_6 + 28k_8) \cos 4x + \\ & + (56k_0 + 4k_2 - 4k_6 - 56k_8) \cos 2x + \\ & + 35k_0 + 5k_2 + 3k_4 + 5k_6 + 35k_8. \end{aligned}\right\} \tag{163}$$

Für die Fälle $n = 5$, 6, 7 und 8 können entsprechende Gleichungen ausgeschrieben werden, indem man die numerischen Werte Seite 10 und 11 in meiner

«Almindelig Iagttagelseslære», København 1889, angegeben finden wird. Jedoch muss dabei beachtet werden, dass die Vorzeichen überall gewechselt werden müssen, wo k_2 oder k_3 samt im Allgemeinen wo k_{4n+2} oder k_{4n+3} als Faktoren auftreten. Die citirten Tafeln geben nämlich da für jedes $2n$ die m^{ten} Differenzen der Binomialkoeffizienten für den $(2n-m)^{\text{ten}}$ Grad. Der Beweis, dass dies das allgemeine Gesetz dieser Koeffizienten ist, kann geführt werden durch Vergleich der Identität

$$2^{p+q} \cdot i^q \cdot \cos^p x \cdot \sin^q x = (e^{xi} + e^{-xi})^p (e^{xi} - e^{-xi})^q$$

mit dem Symbole

$$\triangle^q \circ 2^p \square^p$$

in seiner Anwendung auf eine Funktion, die für das Argument 0 den Wert 1, aber für alle positiven und negativen ganzen Argumente den Wert 0 hat.

§ 39.

Der Newtonsche Begriff dividirter Differenzen knüpft — wie wir es in den einleitenden Paragraphen gesehen haben — an jede Funktion ein unendliches System von abgeleiteten Funktionen, deren jede, weil sie alle rücksichtlich sämtlicher Argumente symmetrisch sind, von der vorhergehenden durch eine form-feste Ableitungsregel abgeleitet wird. Dadurch wird dieser Begriff die Grundlage einer ganzen Interpolationsrechnung. Es giebt aber wenigstens noch einen völlig analogen Begriff, der eine selbständige Interpolations-Methode tragen kann. Diesem Begriff, den ich reziproke Differenzen nenne, fehlen zwar die distributiven Eigenschaften (§ 5, besonders 1 und 2), durch welche die Infinitesimalrechnung und die Symbole so leicht und natürlich an die dividirten Differenzen geknüpft werden; wird deshalb die Interpolationsrechnung der reziproken Differenzen ein schwereres Werkzeug, spannt dagegen ihre Anwendung über ein mannigfach grösseres Gebiet.

Mit derselben Funktionsbezeichnung, $X = f(x)$, die wir oben angewandt haben, definiren wir die reziproken Differenzen der 1^{sten} Ordnung durch

$$\rho(a, b) = \frac{a-b}{A-B} = \frac{1}{\delta(a, b)}. \tag{164}$$

Auch die reziproke Differenz $\rho(a, b)$ ist also symmetrische Funktion ihrer Argumente a und b. $\rho(a, b)$ und $\rho(b, c)$ sind deshalb, indem b konstant gehalten wird, dieselbe Funktion von a und c; und die Funktionsform in $\rho(a, b)$ hängt allein von der Funktionsform in $f(x)$ ab. Insofern könnte die Operation wiederholt werden; aber

$$\frac{a-c}{\rho(a, b) - \rho(b, c)}$$

ist zwar mit Bezug auf a und c symmetrisch, dagegen nicht mit Bezug auf das

Argument b. Um die völlige Symmetric zu erreichen, müssen wir zu diesem Quotienten B addiren. Wir definiren deshalb reziproke Differenzen der 2^{ten} Ordnung durch

$$\left.\begin{aligned}\rho(a, b, c) &= \frac{a-c}{\rho(a, b) - \rho(b, c)} + B = \\ &= \frac{AB(a-b) + CA(c-a) + BC(b-c)}{C(a-b) + B(c-a) + A(b-c)},\end{aligned}\right\} \tag{165}$$

wo der untere, explizite Ausdruck die Symmetrie beweist. — Deshalb werden $\rho(a, b, c)$ und $\rho(b, c, d)$, indem b und c konstant gehalten werden, dieselbe Funktion beziehungsweise von a und d werden, und man kann reziproke Differenzen der dritten Ordnung durch

$$\rho(a, b, c, d) = \frac{a-d}{\rho(a, b, c) - \rho(b, c, d)} + \rho(b, c) \tag{166}$$

definiren.

Um zu beweisen, dass $\rho(a, b, c, d)$ rücksichtlich aller vier Argumente a, b, c und d symmetrisch ist, bemerken wir erst, dass die Symmetrie für b und c gegeben ist. Von diesen lassen wir dann das eine in Verbindung mit a und d aus den reziproken Differenzen des Nenners austreten, so dass nur c fortwährend in allen Differenzen der 1^{sten} Ordnung als konstant betrachtet wird, die wir mit Bezug auf (165) in (166) einführen. Indem hierdurch ein C ein $-C$ in dem Nenner aufhebt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\rho(a, b, c, d) &= \frac{a-d}{\dfrac{a-b}{\rho(a, c) - \rho(b, c)} - \dfrac{b-d}{\rho(b, c) - \rho(d, c)}} + \rho(b, c) = \\ &= \frac{\rho(a, c)\rho(b, c)(a-b) + \rho(d, c)\rho(a, c)(d-a) + \rho(b, c)\rho(d, c)(b-d)}{\rho(d, c)(a-b) + \rho(b, c)(d-a) + \rho(a, c)(b-d)},\end{aligned}$$

welches ganz wie bei (165) zeigt, dass rücksichtlich a, d und b Symmetrie stattfindet, und indem c statt b gesetzt werden kann, ist die Symmetrie vollständig.

Wir können jetzt die allgemeine Regel für die Ableitung reziproker Differenzen $n+1^{\text{ster}}$ Ordnung mittelst im Voraus bekannter der n^{ten} und der $n-1^{\text{sten}}$ Ordnung aufstellen, nämlich

$$\rho(a, b, \ldots, g, h) = \frac{a-h}{\rho(a, b, \ldots, g) - \rho(b, \ldots, g, h)} + \rho(b, \ldots, g). \tag{167}$$

Der Beweis der durchgängigen Symmetrie aller $(n+2)$ Argumente ist überall derselbe, nur dass allmählich mehr Argumente zurückzuhalten werden als Konstanten der reziproken Differenzen $n-1^{\text{ster}}$ Ordnung. Um über alle Ordnungen dieselbe Ableitungsregel zu haben, brauchen wir nur die Funktionswerte als rezi-

proke Differenzen 0^{ter} Ordnung zu betrachten und ferner zu konstatiren, dass als reziproke Differenz $(-1)^{\text{ster}}$ Ordnung die konstante 0 überall auftritt, in völliger Harmonie damit, dass, wenn die Differenz n^{ter} Ordnung $n+1$ Argumente hat, eine reziproke Differenz der $(-1)^{\text{sten}}$ Ordnung von keinem Argument abhängen muss.

In «Oversigt over det kgl. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger» 1906, N° 3, S. 153 ff. habe ich gezeigt, dass die reziproken Differenzen die Gestalt von Quotienten zwischen Determinanten besonderer Formen haben, nämlich als Beispiel einer reziproken Differenz gerader Ordnung

$$\rho(a, b, c, d, e) = \begin{vmatrix} 1, & A, & a, & Aa, & Aa^2 \\ 1, & B, & b, & Bb, & Bb^2 \\ 1, & C, & c, & Cc, & Cc^2 \\ 1, & D, & d, & Dd, & Dd^2 \\ 1, & E, & e, & Ee, & Ee^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & A, & a, & Aa, & a^2 \\ 1, & B, & b, & Bb, & b^2 \\ 1, & C, & c, & Cc, & c^2 \\ 1, & D, & d, & Dd, & d^2 \\ 1, & E, & e, & Ee, & e^2 \end{vmatrix}, \tag{168}$$

und als Beispiel einer reziproken Differenz ungerader Ordnung

$$\rho(a, b, c, d, e, f) = \begin{vmatrix} 1, & A, & a, & Aa, & a^2, & a^3 \\ 1, & B, & b, & Bb, & b^2, & b^3 \\ 1, & C, & c, & Cc, & c^2, & c^3 \\ 1, & D, & d, & Dd, & d^2, & d^3 \\ 1, & E, & e, & Ee, & e^2, & e^3 \\ 1, & F, & f, & Ff, & f^2, & f^3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & A, & a, & Aa, & a^2, & Aa^2 \\ 1, & B, & b, & Bb, & b^2, & Bb^2 \\ 1, & C, & c, & Cc, & c^2, & Cc^2 \\ 1, & D, & d, & Dd, & d^2, & Dd^2 \\ 1, & E, & e, & Ee, & e^2, & Ee^2 \\ 1, & F, & f, & Ff, & f^2, & Ff^2 \end{vmatrix}. \tag{169}$$

Die Symmetrie offenbart sich dadurch, dass jede Zeile der Determinanten ausschliesslich ihrem Argument entspricht. Das Gesetz für die Spalten sieht man am deutlichsten in den Divisor-Determinanten. Die Spalten von ungerader Nummer, $2n-1$, sind die $n-1^{\text{ste}}$ Potenz des Argumentes, die darauffolgenden geraden Spalten haben diese Potenzen, mit den Funktionswerten multiplizirt. In der Dividenden-Determinante wiederholt sich die Divisor-Determinante in allem mit der Ausnahme, dass die letzte Spalte gegen diejenige umgetauscht wird, die in einer Divisor-Determinante für die nächst höhere Ordnung folgen würde.

Als Beispiel der Ausstattung einer Tafel mit reziproken Differenzen wählen wir Logarithmen mit der Grundzahl 2. Die Form des Schemas brauchte nicht von der bei dividirten oder einfachen Differenzen angewandten abzuweichen; es empfiehlt sich jedoch für die 2^{te} und für höhere Ordnungen eine Spalte für die vorläufigen Quotienten aus der vorhergehenden Ordnung einzuschalten:

x	$\log_2(x)$	$\rho(..)$	$\rho(...)$	$\rho(....)$
0	$-\infty$			
		0		
1	0		2 , 2	
		1		2 , 3
2	1		3 , 4	
		2		7 , 9
4	2		3 , 5	
		4		14 , 18
8	3		3 , 6	
		8		28 , 36
16	4		3 , 7	
		16		56 , 72
32	5		3 , 8	
		32		112 , 144
64	6		3 , 9	
		64		224 , 288
128	7		3 , 10	
		128		
256	8			

§ 40.

Mittelst reziproker Differenzen kann man unter einer Bedingung interpoliren, die derjenigen analog ist, welche die Interpolationsmethode Newtons anwendbar macht, nämlich dass man im Voraus die reziproke Differenz irgend einer Ordnung bestimmen kann, welche von dem Argumente x des gesuchten Funktionswertes X und übrigens nur von Argumenten der Tafel abhängt. Kennt man nämlich z. B. $\rho(x, a, b, c, d)$, kann man die reziproken Differenzen niedrigerer Ordnung $\rho(x, a, b, c)$, $\rho(x, a, b)$, $\rho(x, a)$ und endlich den Funktionswert X durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\big(\rho(x,a,b,c)-\rho(a,b,c,d)\big)\cdot\big(\rho(x,a,b,c,d)-\rho(a,b,c)\big) &= x-d \\
\big(\rho(x,a,b)-\rho(a,b,c)\big)\cdot\big(\rho(x,a,b,c)-\rho(a,b)\big) &= x-c \\
\big(\rho(x,a)-\rho(a,b)\big)\cdot\big(\rho(x,a,b)-A\big) &= x-b \\
\big(X-A\big)\cdot\rho(x,a) &= x-a
\end{aligned}\right\} \tag{170}$$

bestimmen.

Das Eliminiren der Zwischenglieder giebt den Kettenbruch

$$X = A + \frac{x-a}{\rho(a,b)}\Big/ + \frac{x-b}{\rho(a,b,c)-A}\Big/ + \frac{x-c}{\rho(a,b,c,d)-\rho(a,b)}\Big/ + \frac{x-d}{\rho(x,a,b,c,d)-\rho(a,b,c)} \tag{171}$$

als die allgemeine Form des Interpolations-Gesetzes mittelst reziproker Differenzen und hebt seine Abhängigkeit von dem «Reste» $\rho(x, a, b, c, d)$ hervor.

Praktisch gesehen ist die Bedingung einer solchen Interpolation die, dass eine $\rho(x, a, b, c, d)$ sich konstant zeigt oder es mit so grosser Annäherung ist, dass der «Rest» nach Gutdünken mit einer nach den Umständen genügenden Genauigkeit angesetzt werden kann.

Ist die reziproke Differenz n^{ter} Ordnung konstant, wird die der $n+1^{\text{sten}}$ Ord-

nung durchgehends unendlich gross sein. Der Kettenbruch ist dann endlich, und man kann ihn sich im Allgemeinen in einen einfachen Bruch umschrieben denken, dessen Zähler und Nenner endliche, ganze Funktionen sind. Jeder solcher Bruch kann ebenfalls als Kettenbruch geschrieben werden und durch Interpolation mittelst reziproker Differenzen berechnet werden.

Wenn der Zähler der Bruchfunktion des m^{ten} Grades, und der Nenner des $m-1^{\text{sten}}$ oder niedrigeren Grades ist, ist in dem Kettenbruch die reziproke Differenz der $2m-1^{\text{sten}}$ Ordnung konstant, die der $2m^{\text{ten}}$ Ordnung $= \infty$.

Wenn dagegen der Zähler und der Nenner beide des m^{ten} Grades, oder der Zähler niedrigeren Grades ist, endigt der Kettenbruch derart, dass die reziproke Differenz der $2m^{\text{ten}}$ Ordnung konstant ist, die der $2m+1^{\text{sten}}$ Ordnung ist dann ∞.

Von der Gültigkeit dieser Sätze überzeugt man sich am leichtesten, wenn man in (168) und (169) die Divisor-Determinanten als identisch $= 0$ ansieht und sie nach irgend einer Zeile auflöst. Aus

$$t_0 - m_0 A + t_1 a - m_1 A a + t_2 a^2 = 0$$

und

$$t_0 - m_0 A + t_1 a - m_1 A a + t_2 a^2 - m_2 A a^2 = 0$$

ergeben sich die beschriebenen Formen für A als Funktion von a, weil die Konstanten t_2 und m_2 als Unter-Determinanten der Divisor-Form von 0 verschieden sein müssen, wenn der Kettenbruch die vorausgesetzte Ordnung erreichen soll.

Die durch die allmähliche Unterbrechung eines Interpolations-Kettenbruchs (171) gebildeten «Konvergenten» werden infolgedessen Bruch-Funktionen entsprechen, bei denen der maximale Grad des Zählers oder des Nenners abwechselnd mit einer Einheit für jeden Schritt der Annäherung wächst.

Gebrochene rationale Funktionen sind also für die Interpolation mittelst reziproker Differenzen, was die ganzen Funktionen der Methode Newtons gegenüber sind, das elementare Gebiet, wo die Methode unbedingt anwendbar ist. Ausserhalb dieses Gebietes werden die Interpolations-Kettenbrüche unendlich, und die Bedingung wird dann sein, dass der Kettenbruch einen bestimmten Wert hat. Die Interpolation mittelst reziproker Differenzen hat also eine bei Weitem ausgedehntere Anwendbarkeit als die Newtonsche; obwohl sie keineswegs als ein Universalmittel bezeichnet werden darf, werden Fälle selten vorkommen, wo man Abnormitäten antrifft, die man reziproken Differenzen gegenüber als eigentliche bezeichnen muss, wenn die Tafel einer eindeutigen Funktion oder einem eindeutigen Funktionszweig entspricht. Unendliche Funktionswerte, Pole sind an sich nicht lästig. Auch bei den endlichen Interpolations-Kettenbrüchen gehören solche zu den normalen Vorkommnissen. Will man die Grenzen der Methode aufsuchen, muss man ihr mehrdeutige oder diskontinuirte Funktionen bieten.

Als belehrend in dieser Beziehung und rücksichtlich des Konvergenzverhältnisses der Kettenbrüche muss ein Fall hervorgehoben werden, der (dem § 5, 7 analog) dem «Rest» eine so einfache allgemeine Form giebt, dass der unendliche Kettenbruch dadurch kontrollirt werden kann. Die Quadratwurzelfunktion wird durch eine Tafel vertreten, deren Argumente die Quadrate $a^2, b^2, c^2, d^2, \ldots$ der willkürlichen Zahlen a, b, c, d, ... sind, welche als Funktionswerte der Tafel genommen werden. Hier zeigt dann (167), dass die allgemeine reziproke Differenz

$$\rho(a^2, b^2, c^2, d^2, \ldots) = a+b+c+d+\ldots \tag{172}$$

ist.

Der Interpolations-Kettenbruch wird dann

$$x = a + \frac{x^2-a^2}{a+b}\Big/ + \frac{x^2-b^2}{b+c}\Big/ + \frac{x^2-c^2}{c+d}\Big/ + \frac{x^2-d^2}{d+x}. \tag{173}$$

Dass diese Gleichung mit Rücksicht auf a, b, c und d identisch ist, und dass ihr, wenn x^2 gegeben ist, sowohl x als $-x$ genügt, sieht man, indem man von hinten die Reihe der sich anbietenden Verkürzungen ausführt.

Sieht man aber von dem Restgliede ab und bildet die Konvergenten des Kettenbruches: $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{x^2-a^2}{a+b}$ u. s. w., findet man eine allgemeine Form derselben, indem man z eine willkürlich gewählte der Wurzeln in $x^2 = z^2$ bezeichnen lässt,

$$\frac{x_0 - z}{x_0 + z} = \frac{a-z}{a+z} \quad \text{und} \quad \frac{x_1 - z}{x_1 + z} = \frac{a-z}{a+z} \cdot \frac{b-z}{b+z},$$

für x_2 erhalten wir, indem wir für b in der letzteren Gleichung $b + \frac{z^2-b^2}{b+c}$ setzen,

$$\frac{x_2 - z}{x_2 + z} = \frac{a-z}{a+z} \cdot \frac{(b-z)(b+c)+z^2-b^2}{(b+z)(b+c)+z^2-b^2} =$$

$$= \frac{a-z}{a+z} \cdot \frac{b-z}{b+z} \cdot \frac{c-z}{c+z},$$

und in derselben Weise nach und nach den allgemeinen Ausdruck

$$\frac{x_n - z}{x_n + z} = \frac{a-z}{a+z} \cdot \frac{b-z}{b+z} \cdot \frac{c-z}{c+z} \cdot \frac{d-z}{d+z} \cdots \tag{174}$$

Findet man nun, indem man die Tafelwerte a, b, c, d, ... der Reihe nach mustert, dass einer derselben, z. B. c, entweder z oder $-z$ gleich ist, wird eben dieser der Wert für x_n und zugleich für alle folgenden Konvergenten.

Handelt es sich um eine wirkliche Interpolation, indem das Interpolationsargument in der Tafel nicht vorkommt, muss der Kettenbruch ein unendlicher werden. Um über seine Konvergenz urteilen zu können, muss man die Tafelwerte auf zwei Funktionszweigen verteilen. Wenn $|a-z| < |a+z|$ ist, gehört der Wert a zu demselben Zweige wie z, widrigenfalls wie $-z$.

Wenn die zur Interpolation benutzten Tafelwerte alle unbedingt demselben Zweige wie z angehören und auch alle endlich bleiben, dann nähert sich an jeder Stufe der entsprechende Konvergent immer mehr z. Der Kettenbruch konvergirt dann nach z, an dem anderen Zweige ebenfalls nach $-z$.

Beharren die zur Interpolation angewandten Tafelwerte an der endlichen Grenze der beiden Zweige, schwankt der Kettenbruch.

Ein einzelner unendlich grosser Tafelwert lässt den vorhergehenden Konvergenten unverändert. Schliesst die Interpolation mit stetiger Anwendung von unendlichen Tafelwerten, kann der Kettenbruch konvergiren und zwar ohne Vorzug für $\pm z$ nach allen möglichen Werten.

Die Frage von Konvergenz und Divergenz setzt in den zweifelhaften Fällen die Kenntnis der Funktionsform der Argumente als von der Ordnungszahl abhängig voraus; ganz wie es bei den unendlichen Summenreihen erforderlich ist, in welche übrigens die hier besprochenen Kettenbrüche transformirt werden können.

Will man, dass jeder n^{te} Konvergent als die Partialsumme s_n der ersten n Glieder auftreten soll, muss nach (174)

$$\frac{s_n - z}{s_n + z} = \frac{s_{n-1} - z}{s_{n-1} + z} \cdot \frac{a_n - z}{a_n + z},$$

folglich wird das allgemeine Glied der Summe

$$u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{z^2 - s_{n-1}^2}{s_{n-1} + a_n}$$

(vergl. pg. 46).

Weil die reziproken Differenzen ein so weit mächtigeres Instrument als die dividirten sind, sind sie natürlich auch schwieriger anzuwenden. Der Unterschied ist grösser, als man es nach der geringen Arbeitsvermehrung bei der Berechnung der einzelnen reziproken Differenz hätte erwarten sollen. Die reziproken Differenzen öffnen dem unendlich Grossen die Tür; in der Praxis aber ist dies immer zugleich das Unbestimmte. Die Zahl ∞ darf nicht unter den durch die Tafel gegebenen vorkommen. Auch nicht in dem dazugehörenden Schema der reziproken Differenzen. Hier tritt aber ∞ ebenso leicht auf, wie 0 als dividirte Differenz vorkommt, und an beiden Stellen ist die Bedeutung dieselbe, nämlich dass die betreffenden $n+1$ Argumente und $n+1$ Funktionswerte, für welche $\rho_n = \infty$, in einer Funktion des n^{ten} Grades passen, gleichviel ob dieser Grad niedriger als in der übrigen Tafel ist. Kommt dieser Fall bei reziproken Differenzen vor, bedeutet es, dass die Arbeit mit einer anderen Auswahl oder einer anderen Ordnung der Tafel-Angaben nochmals zu machen ist. Annäherung in grossen, endlichen Werten kann der Rechner trotzen; aber Vorsicht ist notwendig. Rechenfehler können auf dieselbe Weise wirken; und so häufig treten Vorzeichenwechselungen durch ∞ in Spalten mit reziproken Diffe-

renzen auf, dass man in der Regel hier den grossen Vorteil durch die Differenzen-Probe verliert, dass man, auch ehe die letzte Differenzen-Spalte konstant wird, die Spalten einen immer schlichteren Gang zeigen sieht. Ist die Tafel aus mit Fehlern belasteten Beobachtungen hervorgegangen, muss man beim Gebrauch von reziproken Differenzen sich davor hüten, die Interpolation in höhere Ordnung als streng notwendig aufsteigen zu lassen. Die Kettenbruchform ist so geschmeidig, dass wenn ein Paar Nachbarbeobachtungen grosse Fehler mit entgegengesetzten Vorzeichen haben, kann der Kettenbruch einen Pol dazwischenlegen und dort unendlich stark von dem richtigen abweichen. Alles dies fordert gleichzeitig grosse Intelligenz und grosse Ausdauer oder jedenfalls besonders häufige Anwendung von Doppelrechnung, wenn man mittelst reziproker Differenzen interpoliren soll.

Beispiel 1. Die Tafel

x	X							
—21	0·2							
		15·0						
— 9	1·0		— 1·25,	— 0·25				
		3·0			—24·0,	—21·0		
— 6	2·0		— 3·00,	— 1·00			1,	0
		1·0			— 1·0,	0·0		
— 3	5·0		—15·00,	— 10·00			10,	0
		0·6			0·6,	1·2		
0	10·0		— 5·00,	5·00			—5,	0
		— 0·6			— 0·6,	— 1·2		
3	5·0		—15·00,	—10·00			10,	0
		— 1·0			1·0,	0·0		
6	2·0		— 3·00,	— 1·00			1,	0
		— 3·0			24·0,	21·0		
9	1·0		— 1·25,	— 0·25				
		—15·0						
21	0·2							

wird für das Argument x interpolirt und giebt durch Gebrauch der Tafelargumente $a = 0$, $b = 3$, $c = -3$, $d = 6$ den Kettenbruch

$$X = 10 - \frac{x}{0{\cdot}6}\Big/ + \frac{x-3}{5}\Big/ + \frac{x+3}{0{\cdot}6}\Big/ + \frac{x-6}{5} = \frac{90}{x^2+9}.$$

Beispiel 2. Beweise, dass in einer äquidistanten Tafel für die Exponentialfunktion $X = a^x$ sämtliche Spalten von reziproken Differenzen Exponentialfunktionen darstellen, die, wenn das Intervall $= 1$ ist, für die Ordnungen $4n$ mit X, für die Ordnungen $4n + 2$ mit $-X$ identisch sind, während die ungeraden Ordnungen $2m - 1$ sich untereinander nur durch die konstanten Faktoren $(-1)^{m+1} m$ unterscheiden. Benutze dieses zur Darstellung des Binomialkettenbruches

$$(1+z)^x = 1 + \frac{zx}{1}\Big/ + \frac{z(1-x)}{2}\Big/ + \frac{z(1+x)}{3}\Big/ + \frac{z(2-x)}{2}\Big/ + \frac{z(2+x)}{5}\Big/ + \frac{z(3-x)}{2}\Big/ + \frac{z(3+x)}{7}\Big/ + \ldots$$

Die Konvergenten haben die Formen

$$K_{2n} = \frac{Z\binom{n}{x}}{Z\binom{n}{-x}} \quad \text{und} \quad K_{2n-1} = \frac{Z\binom{n}{x} - z(n-x)\,Z\binom{n-1}{x}}{Z\binom{n}{-x} - z(n-x)\,Z\binom{n-1}{-x}},$$

wo $Z\binom{n}{x}$ eine ganze rationale Funktion des n^{ten} Grades sowohl von z wie von x ist, und zwar

$$Z\binom{0}{x} = 1\,, \quad Z\binom{1}{x} = z(1+x)+2\,, \quad Z\binom{2}{x} = z^2(1+x)(2+x)+6z(2+x)+12.$$

Für diese Funktionen gilt die allgemeine Rekursionsformel

$$Z\binom{n+1}{x} - (2n+1)(z+2)\,Z\binom{n}{x} + z^2(n^2-x^2)\,Z\binom{n-1}{x} = 0.$$

Die z kommt in Potenzen, die x in Faktoriellen vor, und die explizite Form ist

$$Z\binom{n}{x} = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(n+r)!}{r!\,(n-r)!}\, z^{n-r}(x+n)^{n-r\,|\,-1}.$$

Beispiel 3. Wenn eine Tafelfunktion der Bruch des 1^{sten} Grades $X = \dfrac{cx-d}{ax-b}$ ist, zeigt dies sich dadurch, dass die 2^{te} reziproke Differenz konstant ist. Man hat dann $\rho(m,n) = \dfrac{(am-b)(an-b)}{ad-bc}$, und $\rho(m,n,p) = \dfrac{c}{a} = W$ ist der $x = \infty$ entsprechende Funktionswert. Die leichteste Interpolation und Berechnung der Konstanten der Funktion erreicht man dann, nachdem $W = \dfrac{c}{a}$ berechnet ist, indem man bemerkt, dass $\dfrac{1}{X-W}$ eine lineare Funktion von x ist, die, wenn sie nur für zwei Argumente berechnet ist, durch einfache Differenzen 1^{ster} Ordnung interpolirt werden kann.

Beispiel 4. Da die Binomialkoeffizienten nur für ganze Werte ihres Index (und ihrer Ordnung) gegeben sind, wird es eine Aufgabe der Interpolation, entsprechende Funktionen darzustellen. Dies kann mit Vorteil in der Weise geschehen, dass man den Nullpunkt der Indices beim Maximum legt und ihre Quadrate als Argument gebraucht:

$$\frac{(2n)!}{(n-x)!\,(n+x)!} = B_{2n}(x^2) \quad \text{und} \quad \frac{(2n-1)!}{(n-\frac{1}{2}-x)!\,(n-\frac{1}{2}+x)!} = B_{2n-1}(x^2).$$

Sowohl die dividirten als die reziproken Differenzen erhalten dadurch so einfache Formen, dass ihre allgemeinen Gesetze leicht erkannt und bewiesen werden. Man kann deshalb die Differenzentafeln mit ihren Spiegelbildern, den Argumenten $(-x)^2$ entsprechend, erweitern, welche, indem sie wiederholt werden, die Interpolation also unterstützen, dass auf horizontaler Seitenlinie von 0 interpolirt werden kann. So findet man die Reihen:

$$B_{2n}(x^2) = \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left\{1 - \frac{x^2}{n+1}\left(1 - \ldots - \frac{x^2-r^2}{2r(n+r)}\left(1 - \frac{x^2-r^2}{(2r+1)(n+r+1)}\left(1 - \ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$B_{2n-1}(x^2) = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}\left\{1 - \frac{4x^2-1}{4n}\left(1 - \frac{4x^2-1}{8(n+1)}\left(1 - \ldots - \frac{4x^2-(2r-1)^2}{4(2r-1)(n+r-1)}\left(1 - \frac{4x^2-(2r-1)^2}{8r(n+r)}\left(1\cdot\right.\right.\right.\right.\right.$$

und die Kettenbrüche

$$B_{2n}(x^2) = \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left\{1-\frac{x^2}{n+1}\Big/+\frac{x^2-1}{2}\Big/-\frac{x^2-1}{3(n+1)}\Big/+\frac{x^2-4}{2}\Big/-\frac{x^2-4}{5(n+1)}\Big/+\cdots\right.$$

$$B_{2n-1}(x^2) = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}\left\{1-\frac{4x^2-1}{4n}\Big/+\frac{4x^2-1}{2}\Big/-\frac{4x^2-9}{12n}\Big/+\frac{4x^2-9}{2}\Big/-\frac{4x^2-25}{20n}\Big/+\cdots\right.$$

Auf diese Weise kann man auch den ersten Differentialquotienten von B bestimmen.

§ 41.

Ganz wie bei den dividirten Differenzen kann auch hier bei den reziproken Differenzen von solchen mit wiederholten Argumenten die Rede werden. Ihre einfache Berechnung scheitert auch hier an Unbestimmtheiten, die nur ausnahmsweise beseitigt werden können, wie wir es in dem letzten Beispiel des vorigen Paragraphen gesehen haben. Wo aber die Interpolation der Tafelfunktion zu dem betreffenden Argument bei reziproken Differenzen berechtigt ist, kann man sich auch durch die Wiederholung solcher Interpolation reziproke Differenzen verschaffen, in denen das Argument so oft man es wünscht wiederholt ist; und mittelst dieser kann man ferner interpoliren, oft mit grossem Vorteil.

Wenn eine reziproke Differenz nur von einem einzigen wiederholten Argument abhängt, tritt sie für jede Ordnung als eine von der Tafelfunktion abgeleitete Funktion auf. Indem ρ mit der Ordnung als Index als das Zeichen dieser Ableitungs-Operation aufgefasst wird, schreiben wir

$$\rho_0(X) = X, \quad \rho_1(X) = \rho(x,x), \quad \rho_2(X) = \rho(x,x,x) \quad \text{u. s. w.} \tag{175}$$

Wo die schwere Kettenbruchform nicht zu grosse Schwierigkeiten in den Weg legt, kann man hierauf eine selbständige Differentialrechnung bauen, die sich durch ihr ausgedehnteres Gültigkeits-Gebiet empfehlen würde. Besonders kann man das reziproke Differential n^{ter} Ordnung von denen der $n-1^{\text{sten}}$ und der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung ableiten. Um dies zu zeigen, genügt ein Beispiel, wo $n = 4$ ist. Kennt man $\rho_3(X) = \rho(x,x,x,x)$, wird

$$\rho_1\big(\rho_3(X)\big) = \frac{y-x}{\rho(y,y,y,y)-\rho(x,x,x,x)},$$

wenn hierin der Grenzwert für $y = x$ gesetzt wird.

Um aber in einer Tafel über $\rho_3(X)$ mit reziproken Differenzen von $\rho(x,x,x,x)$ zu $\rho(y,y,y,y)$ zu gehen, hätte man die Zwischenglieder $\rho(x,x,x,y)$, $\rho(x,x,y,y)$ und $\rho(x,y,y,y)$ einschalten und jedesmal ein x in y verwandeln müssen. Aber

$$\rho(x,x,x,y)-\rho(x,x,x,x) = \frac{y-x}{\rho(x,x,x,x,y)-\rho(x,x,x)}$$
$$\rho(x,x,y,y)-\rho(x,x,x,y) = \frac{y-x}{\rho(x,x,x,y,y)-\rho(x,x,y)}$$
$$\rho(x,y,y,y)-\rho(x,x,y,y) = \frac{y-x}{\rho(x,x,y,y,y)-\rho(x,y,y)}$$
$$\rho(y,y,y,y)-\rho(x,y,y,y) = \frac{y-x}{\rho(x,y,y,y,y)-\rho(y,y,y)}.$$

Indem man addirt und danach $y=x$ setzt, findet man also

$$4\rho_1\big(\rho_3(X)\big) = \rho_4(X)-\rho_2(X).$$

Ganz so hat man im Allgemeinen

$$\rho_n(X) = n\rho_1\big(\rho_{n-1}(X)\big)+\rho_{n-2}(X). \tag{176}$$

Betreffs des Zusammenhanges zwischen ρ_n und den Differentialquotienten für dieselbe Funktion verweise ich auf Oversigt over det k. d. Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1906, pg. 153—171.

Ausserdem dass selbstverständlich

$$\rho_1(X) = \frac{dx}{dX}, \tag{177}$$

ist es nur notwendig hier zu erwähnen, dass

$$\rho_2(X) = X-2\frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)} \tag{178}$$

und

$$\rho_3(X) = \frac{1}{\frac{dX}{dx}-\frac{3}{2}\frac{\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)}}. \tag{179}$$

Kennt man für eine Funktion die allen Ordnungen entsprechenden ρ_n, kann man dadurch interpoliren. Man findet als Analogie der Taylorschen Reihe den Kettenbruch:

$$f(x+z) = X+\frac{z}{\rho_1(X)}\Big/+\frac{z}{\rho_2(X)-X}\Big/+\frac{z}{\rho_3(X)-\rho_1(X)}\Big/+\dots+\frac{z}{\rho(x,\dots,x,(x+z))-\rho_n(X)} \tag{180}$$

(wo $f(x)=X$), den man auch schreiben kann

$$f(x+z) = X+\frac{z}{\rho_1(X)}\Big/+\frac{z}{2\rho_1(\rho_1(X))}\Big/+\frac{z}{3\rho_1(\rho_2(X))}\Big/+\frac{z}{4\rho_1(\rho_3(X))}\Big/+\dots, \tag{181}$$

wo doch das exakte Restglied keinen anderen Ausdruck als in (180) finden kann.

Es ist eine einfache Folge von der Reziprozität der Differenzen, dass diese Kettenbruchentwickelungen häufig wechselnde Formen für Glieder und Konvergenten von gerader und ungerader Ordnung haben. Man kann aber jeden Kettenbruch in der Weise umformen, dass jede zweite Konvergente übersprungen wird, und dazu hat man (siehe Tidsskrift for Matematik 1870 pg. 145) die Formeln:

$$b_1 - \frac{a_{1,2}}{b_2}\Big/ - \frac{a_{2,3}}{b_3}\Big/ - \frac{a_{3,4}}{b_4}\Big/ - \frac{a_{4,5}}{b_5}\Big/ - \frac{a_{5,6}}{b_6}\Big/ - \frac{a_{6,7}}{b_7}\Big/ - \ldots =$$

$$= b_1 - \frac{a_{1,2}b_3}{b_2b_3 - a_{2,3}}\Big/ - \frac{a_{2,3}a_{4,5}b_5}{b_3b_4b_5 - a_{3,4}b_5 - b_3a_{4,5}}\Big/ - \frac{b_3a_{4,5}a_{5,6}b_7}{b_5b_6b_7 - a_{5,6}b_7 - b_5a_{6,7}}\Big/ - \ldots \tag{182}$$

$$= \frac{1}{b_2}\left\{b_1b_2 - a_{1,2} - \frac{a_{1,2}a_{2,3}b_4}{b_2b_3b_4 - a_{2,3}b_4 - b_2a_{3,4}}\Big/ - \frac{b_2a_{3,4}a_{4,5}b_6}{b_4b_5b_6 - a_{4,5}b_6 - b_4a_{5,6}}\Big/ - \ldots\right\} \tag{183}$$

wo nach abweichenden Anfängen die allgemeine Form geltend wird:

$$- \frac{b_{n-1}a_{n,n+1}a_{n+1,n+2}b_{n+3}}{b_{n+1}b_{n+2}b_{n+3} - a_{n+1,n+2}b_{n+3} - b_{n+1}a_{n+2,n+3}}\Big/ - \tag{184}$$

Beispiel 1. Durch (176) wird es für die Potenzfunktion $Z = (1+z)^x$ mittelst des allgemeinen Induktionsbeweises gezeigt, dass

$$\rho_{2r-1}(Z) = \frac{r(2-x)\ldots(r-x)}{x(1+x)\ldots(r-1+x)}(1+z)^{1-x}$$

$$\rho_{2r}(Z) = \frac{(1+x)\ldots(r+x)}{(1-x)\ldots(r-x)}(1+z)^x.$$

Der Kettenbruch wird dadurch mit dem in dem zweiten Beispiel des vorigen Paragraphen von der Exponentialfunktion abgeleiteten identisch. Schiebt man aus diesem die Hälfte der Konvergenten nach (182) aus, erhält man

$$(1+z)^x = 1 + \frac{2zx}{2+z-zx}\Big/ + \frac{z^2(x^2-1)}{3(2+z)}\Big/ + \frac{z^2(x^2-4)}{5(2+z)}\Big/ + \frac{z^2(x^2-9)}{7(2+z)}\Big/ + \ldots,$$

einen Kettenbruch, der mit $c = 1 + \frac{2}{z}$

$$\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^x = 1 + \frac{2x}{c-x}\Big/ + \frac{x^2-1}{3c}\Big/ + \frac{x^2-4}{5c}\Big/ + \frac{x^2-9}{7c}\Big/ + \ldots$$

oder am einfachsten

$$\frac{(c+1)^x - (c-1)^x}{(c+1)^x + (c-1)^x} = \frac{x}{c}\Big/ + \frac{x^2-1}{3c}\Big/ + \frac{x^2-4}{5c}\Big/ + \frac{x^2-9}{7c}\Big/ + \frac{x^2-16}{9c}\Big/ + \ldots \tag{185}$$

geschrieben werden kann.

Durch eine Umschreibung, wonach $m = \frac{1}{x}$ wird, bieten die Konvergenten dieses Kettenbruchs für solch' allgemeines Wurzelausziehen, wo das Resultat in der Form von rationalem Bruch gesucht wird, wenn m eine ganze Zahl ist, äusserst vorteilhafte Annäherungen. Wenn die m^{te} Wurzel von g ausgezogen werden soll,

sucht man erst mittelst einer Potenztafel einen Bruch a, mit kleinem Zähler und Nenner, so dass a^m von g nicht sehr verschieden ist. Damit in unserm Kettenbruch $\frac{g}{a^m}=\frac{c+1}{c-1}$ gesetzt werden kann, muss $c=\frac{g+a^m}{g-a^m}$ sein. In den Konvergenten für $\frac{\sqrt[m]{\frac{c+1}{c-1}}+1}{\sqrt[m]{\frac{c+1}{c-1}}-1}=k_i$ schreiben wir $cm=k$, und haben

$$k_1=k,\quad k_2=\frac{3k^2+1-m^2}{3k},\quad k_3=k\frac{15k^2+6-9m^2}{15k^2+1-4m^2},$$

$$k_4=\frac{105k^4+(45-90m^2)k^2+1-10m^2+9m^4}{105k^3+(10-55m^2)k},$$

$$k_5=k\frac{945k^4+210(2-5m^2)k^2+15(1-13m^2+15m^4)}{945k^4+105(1-7m^2)k^2+1-20m^2+64m^4},\ldots,$$

dann wird mit starker und mit i wachsender Annäherung $g^{\frac{1}{m}}=a\frac{k_i+1}{k_i-1}$.

Für $9^{\frac{1}{3}}$ findet man mit $a=2$, indem $c=17$:

$$i=1,\quad \frac{52}{25}=2{\cdot}0800$$

$$i=2,\quad \frac{7948}{3821}=2{\cdot}08008375$$

$$i=3,\quad \frac{50623}{24337}=2{\cdot}08008382299$$

$$i=4,\quad \frac{18056515}{8680667}=2{\cdot}080083823052$$

Noch besser ist indessen ein nach Oppermanns Mitteilung von Huygens herrührendes Verfahren. Bei diesem wendet man nur den ersten unserer Konvergenten $k_1=k$ an, wiederholt aber die Operation mit dem gefundenen Resultate als ersten Anfangswert. Setzt man in unser Beispiel $a=\frac{52}{25}$, wird $c=\frac{281233}{17}$ und für $9^{\frac{1}{3}}$ erhält man

$$\frac{21936616}{10546025}$$

in allen 12 Dezimalstellen mit dem aus $i=4$ gefundenen übereinstimmend.

Der letzterwähnte Kettenbruch lässt sich durch Kürzen in

$$\frac{(c+1)^x-(c-1)^x}{(c+1)^x+(c-1)^x}=\frac{2x}{2c}\Big/-\frac{\frac{4-4x^2}{4-1}}{2c}\Big/-\frac{\frac{16-4x^2}{16-1}}{2c}\Big/-\ldots-\frac{\frac{(2r)^2-(2x)^2}{(2r)^2-1}}{2c}\Big/-\ldots$$

umschreiben. Für $x=\frac{1}{2}$ giebt dieser den rein periodischen Kettenbruch für $c-\sqrt{c^2-1}$. Auch für jede Potenziation oder Wurzelausziehung, für willkürliches x endet bei $r=\infty$ dieser Kettenbruch als rein periodisch. Seine Konvergenz-Bedin-

gung ist überall dieselbe wie für die Quadratwurzel. Immer empfiehlt es sich den letzten partiellen Nenner $c+\sqrt{c^2-1}$ statt $2c$ zu setzen, wo man die Rechnung im Endlichen abbrechen muss.

Beispiel 2. Finde die Kettenbrüche der natürlichen Exponentialfunktion.

$$e^x = 1+\frac{x}{1}\Big/-\frac{x}{2}\Big/+\frac{x}{3}\Big/-\frac{x}{2}\Big/+\ldots+\frac{x}{2r-1}\Big/-\frac{x}{2}\Big/+\ldots$$

Nach (183) ergiebt sich

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{x}{2}\Big/+\frac{x^2}{6}\Big/+\frac{x^2}{10}\Big/+\frac{x^2}{14}\Big/+\ldots+\frac{x^2}{4n-2}\Big/+\ldots$$

mit den Konvergenten:

$$\frac{0}{1},\quad \frac{x}{2},\quad \frac{6x}{12+x^2},\quad \frac{5\cdot4\cdot3\cdot\frac{x}{1}+3\cdot2\cdot1\cdot\frac{x^3}{6}}{6\cdot5\cdot4+4\cdot3\cdot2\cdot\frac{x^2}{2}},$$

$$\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot\frac{x}{1}+5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot\frac{x^3}{6}}{8\cdot7\cdot6\cdot5+6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\frac{x^2}{2}+4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\frac{x^4}{24}},\quad\ldots$$

Beispiel 3. Für die Tangensfunktion $X=\operatorname{tg}x$ wird das vierfältige Gesetz

$$\begin{aligned}
\rho_{4n}(\operatorname{tng}x) &= \operatorname{tng}x\\
\rho_{4n+1}(\operatorname{tng}x) &= (2n+1)(n+\cos^2 x)\\
\rho_{4n+2}(\operatorname{tng}x) &= -\cot x\\
\rho_{4n+3}(\operatorname{tng}x) &= (n+1)(2n+1+2\sin^2 x)
\end{aligned}$$

mittelst (176) durch Induktion bewiesen. Daraus folgt der Kettenbruch

$$\operatorname{tng}(x+z) = \operatorname{tng}x+\frac{z(\operatorname{tng}x+\cot x)}{\cot x}\Big/-\frac{z}{1}\Big/-\frac{z}{3\operatorname{tng}x}\Big/+\frac{z}{1}\Big/+\frac{z}{5\cot x}\Big/-\frac{z}{1}\Big/-\frac{z}{7\operatorname{tng}x}\Big/+\ldots$$

Da aber

$$\operatorname{tng}z\cdot\operatorname{tng}x = 1-\cfrac{1}{1+\cfrac{\operatorname{tng}(x+z)-\operatorname{tng}x}{\operatorname{tng}x+\cot x}},$$

bekommt man den merkwürdigen Kettenbruch

$$\operatorname{tng}z = \cot x\left\{1-\frac{1}{1}\Big/+\frac{z}{\cot x}\Big/-\frac{z}{1}\Big/-\frac{z}{3\operatorname{tng}x}\Big/+\frac{z}{1}\Big/+\frac{z}{5\cot x}\Big/-\frac{z}{1}\Big/-\frac{z}{7\operatorname{tng}x}\Big/+\ldots,\right.$$

der von x unabhängig sein muss. Dies ergiebt sich denn auch, wenn man mit Bezug auf (183) jede zweite Konvergente ausschiebt, welches giebt:

$$\operatorname{tng}z = \frac{z}{1}\Big/-\frac{z^2}{3}\Big/-\frac{z^2}{5}\Big/-\frac{z^2}{7}\Big/-\frac{z^2}{9}\Big/-\ldots,$$

was sich auch aus dem Kettenbruch des vorigen Beispiels für e^x entnehmen lässt. Hätte man dagegen (182) zur Ausschiebung eben der anderen Konvergenten angewandt, würde das Paradoxon sich in verwickelterer Gestalt fortgesetzt haben. Die

Konvergenten, die mit Recht ausgeschoben werden müssen, können als eine Art von intermediären Konvergenten zwischen der vorhergehenden und der nachfolgenden guten Konvergente aufgefasst werden.

Beispiel 4. Die Logarithmenentwickelung mittelst reziproker Differenzen gründet sich darauf, dass, wenn $X = \log x$, ist

$$\rho_{2n-1}(X) = n^2 x \quad \text{und} \quad \rho_{2n}(X) = \log x + 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right),$$

daraus folgt der Kettenbruch

$$\log(1+a) = \frac{a}{1}\Big/ + \frac{a}{2}\Big/ + \frac{a}{3}\Big/ + \frac{2a}{2}\Big/ + \frac{2a}{5}\Big/ + \frac{3a}{2}\Big/ + \frac{3a}{7}\Big/ + \dots$$

und infolge (182)

$$\log\left(\frac{c+1}{c-1}\right) = \frac{2}{c}\Big/ - \frac{1}{3c}\Big/ - \frac{4}{5c}\Big/ - \frac{9}{7c}\Big/ - \frac{16}{9c}\Big/ - \dots,$$

dessen Konvergenten

$$\frac{2}{c},\quad \frac{6c}{3c^2-1},\quad \frac{30c^2-8}{15c^3-9c},\quad \frac{210c^3-110c}{105c^4-90c^2+9},\quad \frac{1890c^4-1470c^2+128}{945c^5-1050c^3+225c},$$

$$\frac{20790c^5-21420c^3+4158c}{10395c^6-14175c^4+4725c^2-225},$$

sind.

Man bemerke die Identität des Kettenbruchs für $\frac{1}{2}\log\frac{c+1}{c-1}$ und für

$$\frac{1}{x}\,\frac{\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^x - 1}{\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^x + 1},$$

wenn in letzterem $x = 0$ gesetzt wird.

Weil

$$\log\frac{c+1}{c-1} = \frac{4}{2c}\Big/ - \frac{\frac{4}{3}}{2c}\Big/ - \frac{\frac{16}{15}}{2c}\Big/ - \frac{\frac{36}{35}}{2c}\Big/ - \frac{\frac{64}{63}}{2c}\Big/ - \dots$$

hängt auch die Konvergenz des Kettenbruchs für Logarithmen von derjenigen der Quadratwurzel ab, und unser Kettenbruch kann durch Umtausch von $2c$ mit $c+\sqrt{c^2-1}$ im letzten Partialnenner verbessert werden.

VIERTER TEIL.

§ 42.

Funktionen mit zwei oder mehr unabhängigen Variabeln gegenüber hat alle Interpolation mit grossen Schwierigkeiten zu kämpfen. Tafeln mit mehr als einem Argument in übersichtliche Gestalt zu bringen, ist schwierig; und selbst bei der sparsamsten Besetzung mit Argumenten droht doch der Umfang der Tafel über alle Grenzen hinaus zu wachsen.

Für jede Interpolationslehre scheint es hier völlig notwendig vorauszusetzen, dass die Funktion in die Gestalt

$$X = h + kx + l\mathfrak{x} + \ldots + t\xi, \tag{186}$$

gebracht wird, wo $h, k, l, \ldots, t$ Konstanten sind, während $x, \mathfrak{x}, \ldots, \xi$ entweder die Argumente selbst der Funktion X sind — nämlich wenn sie linear ist — oder leicht berechenbare Funktionen der Argumente bezeichnen. In diesen Fällen kann man sich ja die Konstanten durch lineare Gleichungen in genügender Anzahl bestimmt denken, die man der Tafel entnehmen kann, und danach X berechnen; dies kann aber kaum als eine Interpolation bezeichnet werden. Eine solche müsste wenigstens fordern, dass die Konstanten in methodischer Weise eliminirt würden.

Denken wir uns zur Bestimmung der Funktion $X = f(x, \mathfrak{x}, \ldots, \xi)$ die Tafelwerte $A = f(a, \mathfrak{a}, \ldots, \alpha)$, $B = f(b, \mathfrak{b}, \ldots, \beta)$, $D = f(d, \mathfrak{d}, \ldots, \delta)$ und $E = f(e, \mathfrak{e}, \ldots, \varepsilon)$ gegeben, giebt (186) uns die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & \mathfrak{x}, & \xi, & X \\ 1, & a, & \mathfrak{a}, & \alpha, & A \\ 1, & b, & \mathfrak{b}, & \beta, & B \\ 1, & d, & \mathfrak{d}, & \delta, & D \\ 1, & e, & \mathfrak{e}, & \varepsilon, & E \end{vmatrix} = 0. \tag{187}$$

Hier ist es bemerkenswert, dass eine recht kunstlose Lösung der Gleichungen (186) als eine Transformation von (187) mittelst dividirter Differenzen geschrieben werden kann. Diese müssen nur, weil mehrere von denselben Argumenten abhängen, mit den betreffenden Funktionswerten z. B. mit $\delta(A, B)$ geschrieben werden, nicht mit den Argumenten als ihrer unabhängige Variable, also nicht mit dem bisher dafür angewandten $\delta(a, b)$. Bilden wir nämlich mit Rücksicht auf die Spalte x, a, b, d, e, dividirte Differenzen eben so wohl für die anderen Argumente (oder Argument-Funktionen) $\mathfrak{x}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$, und $\xi, \alpha, \beta, \delta, \varepsilon$, als für die Funktionswerte X, A, B, D, E,

$$\delta(\mathfrak{x},\mathfrak{a}) = \frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{a}}{x-a}\,,\quad \delta(\xi,\alpha) = \frac{\xi-\alpha}{x-a}\,,\quad \delta(X,A) = \frac{X-A}{x-a} \tag{188}$$

u. s. w., kann die Determinante der Gleichung (187) in

$$\begin{vmatrix} 1, & \delta(\mathfrak{x},\mathfrak{a}), & \delta(\xi,\alpha), & \delta(X,A) \\ 1, & \delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b}), & \delta(\alpha,\beta), & \delta(A,B) \\ 1, & \delta(\mathfrak{b},\mathfrak{d}), & \delta(\beta,\delta), & \delta(B,D) \\ 1, & \delta(\mathfrak{d},\mathfrak{e}), & \delta(\delta,\varepsilon), & \delta(D,E) \end{vmatrix} = 0 \tag{189}$$

umschrieben werden.

Ohne eine Symmetriebedingung zu brechen, kann man nun hier z. B. die Spalte, $\delta(\mathfrak{x},\mathfrak{a})$, $\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, $\delta(\mathfrak{b},\mathfrak{d})$, und $\delta(\mathfrak{d},\mathfrak{e})$ als Operationsargument nehmen und mit Rücksicht darauf, dividirte Differenzen 2$^{\text{ter}}$ Ordnung für die sämtlichen übrigen Spalten bilden, also

$$\delta(\xi,\alpha,\beta) = \frac{\delta(\xi,\alpha)-\delta(\alpha,\beta)}{\delta(\mathfrak{x},\mathfrak{a})-\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})} \quad \text{und} \quad \delta(X,A,B) = \frac{\delta(X,A)-\delta(A,B)}{\delta(\mathfrak{x},\mathfrak{a})-\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}\,. \tag{190}$$

Hierdurch wird die Determinantengleichung wieder transformirt und giebt

$$\begin{vmatrix} 1, & \delta(\xi,\alpha,\beta), & \delta(X,A,B) \\ 1, & \delta(\alpha,\beta,\delta), & \delta(A,B,D) \\ 1, & \delta(\beta,\delta,\varepsilon), & \delta(B,D,E) \end{vmatrix} = 0. \tag{191}$$

Fährt man in analoger Weise fort und bildet dividirte Differenzen 3$^{\text{ter}}$ Ordnung, indem man $\delta(\xi,\alpha,\beta)$, $\delta(\alpha,\beta,\delta)$ und $\delta(\beta,\delta,\varepsilon)$ als Operationsargumente nimmt, so dass z. B. hier

$$\delta(X,A,B,D) = \frac{\delta(X,A,B)-\delta(A,B,D)}{\delta(\xi,\alpha,\beta)-\delta(\alpha,\beta,\delta)}\,, \tag{192}$$

gelangt man endlich zu einer Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} 1, & \delta(X,A,B,D) \\ 1, & \delta(A,B,D,E) \end{vmatrix} = 0. \tag{193}$$

Und diese löst die Interpolationsaufgabe, denn

$$\delta(X,A,B,D) = \delta(A,B,D,E)$$

in Verbindung mit den letzten Gleichungen unter (192), (190) und (188) giebt

$$X = A+(x-a)\big\{\delta(A,B)+\big(\delta(\mathfrak{x},\mathfrak{a})-\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\big)\big[\delta(A,B,D)+\big(\delta(\xi,\alpha,\beta)-\delta(\alpha,\beta,\delta)\big)\,\delta(A,B,D,E)\big]\big\}. \tag{194}$$

Mit demselben Schema hätte man noch zu einem anderen Wert $Y = f(y,\mathfrak{y},\upsilon)$ interpoliren können und hätte

$$Y = E+(y-e)\big\{\delta(D,E)+\big(\delta(\mathfrak{e},\mathfrak{y})-\delta(\mathfrak{d},\mathfrak{e})\big)\big[\delta(B,D,E)+\big(\delta(\delta,\varepsilon,\upsilon)-\delta(\beta,\delta,\varepsilon)\big)\delta(A,B,D,E)\big]\big\} \tag{195}$$

gefunden.

Man hat doch nur eine geringe Arbeitsersparnis durch diese Interpolationsmethode gewonnen; ausserdem ist sie der Unbestimmtheit ausgesetzt, indem zwei oder mehr Operations-Argumente für dieselbe Ordnung denselben Wert bekommen

können. Es wird vorzuziehen sein, die Konstanten $h, k, l, \ldots, t$ mittelst der Gleichungen (186) zu berechnen, wenn dadurch auch nur wenig zufällige spezielle Erleichterung herbeizuführen ist. Ebenfalls ist dies ratsam, wenn zahlreiche Interpolationen mit denselben Tafel-Werten zu unternehmen sind.

Haben die Argumente, die wir hier mit Buchstaben aus dem lateinischen, dem deutschen und dem griechischen Alphabet bezeichnet haben, untereinander unabhängige Variablen vertreten, sind die oben angegebenen Methoden die einzig anwendbaren. Ist dies nicht der Fall, dann ist die Form nicht linear und grosse Schwierigkeiten werden entstehen. Ob die Funktion eine ganze rationale ist, ändert nicht viel an der Sache. Wir müssen bemerken, dass die Verhältnisse zwischen den Unterdeterminanten in (187) rücksichtlich der wirklich unabhängigen Argumente, z. B.

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & A \\ 1, & b, & B \\ 1, & d, & D \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & a, & \mathfrak{a} \\ 1, & b, & \mathfrak{b} \\ 1, & d, & \mathfrak{d} \end{vmatrix},$$

zwar mit dividirten Differenzen einige Analogie haben und besonders konstant sind, wenn die Funktion ersten Grades ist; sie sind aber nicht ganze Funktionen $n-1^{\text{sten}}$ Grades, wenn die Funktion ganz und n^{ten} Grades ist. Damit scheint die Möglichkeit einer Interpolation für Funktionen von mehreren Argumenten, welche nach Analogie mit derjenigen gebildet wäre, die für Funktionen mit 1 Argument so fruchtbar war, ausgeschlossen.

§ 43.

Man kann die Interpolation mit mehreren Argumenten auf eine Anzahl von Interpolationen, jede mit einem Argument, reduziren. Dass dies ohne besondere Operationen gelingen kann, hängt jedoch davon ab, ob die Tafel in der Weise geordnet ist, dass eine genügend grosse Anzahl von Tafelpositionen vorliegt, welche nur rücksichtlich eines Argumentes variiren, während die übrigen übereinstimmen. Am einfachsten ist dies zu erreichen, wenn die Tafel rücksichtlich aller Argumente äquidistant ist und in jeder Beziehung hinreichenden Umfang hat.

Soll man mittelst Ein-Argument-Interpolationen eine Funktion interpoliren, die rücksichtlich jedes ihrer beiden Argumente n^{ten} Grades ist, muss die abschliessende Ein-Argument-Interpolation mit $n+1$ Werten ausgeführt werden, von deren Argumenten das eine variirt, während das andere schon den verlangten Zahlen-Wert hat; aber von diesen $n+1$ Funktionswerten muss jeder für sich erst durch eine Interpolation bestimmt werden; und sollen diese Interpolationen durch Ein-Argument-Interpolation ausgeführt werden können, muss die Tafel alle $(n+1)^2$ Kombinationen von $n+1$ untereinander verschiedenen Zahlenwerten für jedes der Argumente umfassen.

Ist von Interpolation mit Bezug auf 3 Argumente die Rede, müssen $(n+1)^2$ Ein-Argument-Interpolationen angewandt werden, um dem Argument Nr. 3 seinen Wert zu geben, und danach wird, wie oben betreffs Interpolation mit zwei Argumenten gezeigt ist, interpolirt. Im Ganzen wird eine Funktion, die rücksichtlich jedes ihrer r Argumente von n^{tem} Grade ist, zu ihrer gesammten Interpolation

$$\frac{1}{n}\left((1+n)^r-1\right)$$

Ein-Argument-Interpolationen erfordern; jede von ihnen ist n^{ter} Ordnung, und $(1+n)^r$ Tafelwerte müssen im Allgemeinen vorhanden sein.

Ist die Voraussetzung der Interpolation die, dass die Funktion sowohl nach jedem einzelnen als auch nach sämtlichen Argumenten des n^{ten} Grades ist, ist nur eine kleinere Anzahl von Tafelpositionen erforderlich, aber die Anzahl der Interpolationen bleibt dieselbe, mit r unheimlich stark zunehmende Anzahl.

Dies ist doch sicher die günstigste Form von Interpolation bei mehreren Argumenten. Die einzige weitere Arbeitsersparnis, die erreichbar ist, scheint darauf zu beruhen, dass mehrere Interpolationen mit Benutzung derselben Tafelpositionen auszuführen sind, und dadurch kann man wirklich gute Oekonomie erreichen.

Soll eine Funktion mit mehreren Variabeln durch Beobachtungen empirisch bestimmt werden, muss es deshalb den Beobachtern in hohem Grade eingeschärft werden, wo möglich die Beobachtungen in Reihen einzuteilen, innerhalb welcher jedesmal nur ein Argument variirt, und selbstverständlich deren genügend aufzustellen. Wenn dies auch dem Beobachter grosse Arbeit kostet, würde doch durch eine planlose Verteilung der Beobachtungen die Berechnung der Interpolationsformel noch viel ärger belästigt, ja sie kann leicht dadurch ganz unmöglich gemacht werden.

§ 44.

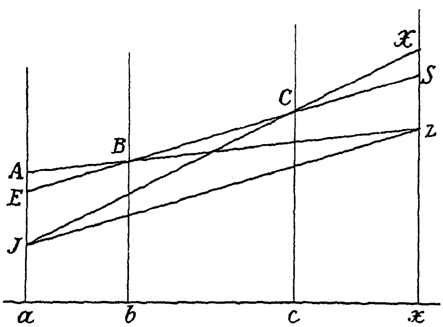
Die allgemeinen Fälle der Interpolation von hohem Grade und mit mehreren Argumenten auf die eben notwendige Anzahl von Ein-Argument-Interpolationen zu reduzieren, ist ein interessantes Problem, aber so schwierig ist es, dass kaum andere Fälle als höchstens die Interpolation zweiten Grades mit zwei Argumenten praktische Bedeutung bekommen können. Dabei bietet uns eine geometrische Ausdrucksweise so grosse Vorteile, dass wir geradezu voraussetzen wollen, dass die beiden Argumente rechtwinkelige Koordinaten für Punkte einer Ebene sind.

Deshalb brauchen wir ja nicht der Interpolation die Gestalt einer geometrischen Konstruktion aufzuzwingen. Während wir die für die Berechnung eben nötigen

Formeln geben, wollen wir die Konstruktion als Hauptsache mitteilen; denn sie bezeichnet am besten den Weg.

Für die Ein-Argument-Interpolation zweiten Grades hat man eine sehr einfache Konstruktion, nämlich die Anwendung des Satzes von Pascal auf eine Parabel, welche die zwei gegebenen Punkte in den Durchschnittspunkten der Ordinaten mit der unendlich fernen geraden Linie zusammenfallend hat.

Auf einer geraden Linie setzen wir die Argumente a, b, c, x als Abscissen ab. Auf den entsprechenden unter sich parallelen Ordinaten werden die Funktionswerte A, B, C, X angegeben. Diese Buchstaben lassen wir zugleich die 3 gegebenen Punkte A, B und C und den in unserer Konstruktion gesuchten Punkt X bezeichnen. Durch A und B zieht man eine gerade Linie, welche die Ordinate von x in Z schneidet. Von Z zieht man eine gerade Linie $\neq BC$; sie schneidet die Ordinate aA in I. Dann wird die gerade Linie durch I und C die Ordinate xZ in dem gesuchten Punkt X schneiden, so dass das Resultat der Interpolation als xX gemessen werden kann.



Die Durchschnittspunkte der geraden Linie BC mit den a und x Ordinaten bezeichnen wir mit E und S.

Die Voraussetzung der Interpolation 2ten Grades

$$X = C + (x-c)\big(\delta(b,c) + (x-b)\,\delta(a,b,c)\big)$$

ist

$$\delta(b,c,x) = \delta(a,b,c);$$

aber diese Gleichung schreiben wir

$$(c-a)\big(\delta(c,x) - \delta(b,c)\big) = (x-b)\big(\delta(b,c) - \delta(a,b)\big),$$

weil wir sehr leicht dividirte Differenzen erster Ordnung, aber schwieriger die zweiter Ordnung geometrisch auslegen können. Also bekommen wir Glied für Glied

$$(C-I)-(C-E) = (S-B)-(Z-B)$$

oder

$$E-I = S-Z.$$

Geometrisch ist die Richtigkeit der Interpolation also nur davon bedingt, dass $IZ \neq BC$, welches eben der Satz von Pascal ist.

Durch Vertauschen von A, B und C, kann die Interpolation in sechs verschiedenen Weisen ausgeführt werden. Also lässt sich X durch Schneiden der Ordinate von x mit drei geraden Linien bestimmen, deren jede durch drei Punkte an den gegebenen Ordinaten bestimmt ist.

§ 45.

Die allgemeine Funktion 2^{ten} Grades mit zwei Argumenten, $z = f(x, y)$, hat 6 arbiträre Konstanten. Zu Interpolation mit Bezug auf eine solche sind also 6 Tafel-Werte erforderlich. Wenn man x und y als rechtwinkelige Koordinaten auffasst, muss man den Wert von z für 6 Punkte der Ebene kennen.

Liegen 3 von diesen Punkten an einer geraden Linie, kann man mittelst Ein-Argument-Interpolation zu jedem Punkt von dieser Linie unmittelbar interpoliren, und das Argument kann entweder x oder y oder eine willkürliche lineare Funktion derselben sein. Also kann man auch zu dem Durchschnittspunkt dieser Linie und der geraden Linie durch 2 der übrigen gegebenen Punkte interpoliren. (Sind die Linien parallel, ist die zweite dividirte Differenz auf beiden Linien dieselbe.)

Liegen auch an einer anderen geraden Linie 3 gegebene Punkte, muss eine Bedingung erfüllt sein. Einer der Punkte ist überflüssig; aber mit den anderen kann man nicht zu Punkten ausserhalb der zwei Linien interpoliren.

In allen anderen Fällen kann man also nicht nur die nötigen 3, sondern sogar 4 Linien hervorziehen, an welchen entlang Ein-Argument-Interpolation ausgeführt werden kann. Für Interpolation zu einem willkürlichen fraglichen Punkt der Ebene braucht man dann nur die Durchschnittspunkte einer geraden Linie durch diesen Punkt und 3 der bekannten Linien zu bestimmen, auf jeder Linie zu diesem Durchschnittspunkte interpoliren und mittelst der Werte derselben zu dem Werte in dem fraglichen Punkt interpoliren. Keine der vorbereitenden Rechnungen erfordert dann Anderes als die Bestimmung der Koordinaten ξ und η für den Durchschnittspunkt von zwei geraden Linien (1, 2) und (3, 4) durch

$$\frac{\xi - x_1}{\xi - x_2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_2)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_3 - y_2)} = \frac{\eta - y_1}{\eta - y_2}. \tag{196}$$

In den ganz allgemeinen Fällen, wo nur je 2 und 2 gegebene Punkte in derselben geraden Linie liegen, scheint es dann am vorteilhaftesten zu dem bereits erwähnten zurückzukehren, indem man in spezieller Weise eine Interpolation zu einem Durchschnittspunkt der Linien durch 2 Paare gegebener Punkte ausführt. Dies ist auch leicht zu erreichen. Bezeichnet man mit ζ_a den Funktionswert des Durchschnittspunktes, dessen Koordinaten ξ_a und η_a sind, werden die Werte der zwei Durchschnittspunkte mit der geraden Linie durch das 3te Punktpaar ζ_b und ζ_c durch Ein-Argument-Interpolationen bestimmt werden und danach durch eine solche die lineare Bedingung abgeben, dass ζ_a den rechten Wert bekommen hat.

Geben wir den Werten und Koordinaten der 6 gegebenen Punkte die Indices 1, 2, 3, 4, 5 und 6, und lassen wir den Index a dem Schneiden der Linien (1, 2) und (3, 4), den Index b dem Schneiden der Linien (3, 4) und (5, 6) und den Index c

dem Schneiden der Linien (5, 6) und (1, 2) entsprechen, und haben wir infolge Gleichungen von der Gestalt (196) die Koordinaten ξ_a, η_a, ξ_b, η_b, ξ_c und η_c berechnet, dann lösen wir unsere Aufgabe durch die 3 Gleichungen, welche bedeuten, dass die 3[te] dividirte Differenz für die 4 Punkte jeder unserer 3 Linien $= 0$ ist

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\zeta_a}{(\xi_a-x_1)(\xi_a-x_2)} - \frac{\zeta_c}{(\xi_c-x_1)(\xi_c-x_2)} + \frac{\xi_a-\xi_c}{x_2-x_1}\left\{\frac{z_2}{(\xi_c-x_2)(\xi_a-x_2)} - \frac{z_1}{(\xi_c-x_1)(\xi_a-x_1)}\right\} &= 0\\
\frac{\zeta_b}{(\xi_b-x_3)(\xi_b-x_4)} - \frac{\zeta_a}{(\xi_a-x_3)(\xi_a-x_4)} + \frac{\xi_b-\xi_a}{x_4-x_3}\left\{\frac{z_4}{(\xi_a-x_4)(\xi_b-x_4)} - \frac{z_3}{(\xi_a-x_3)(\xi_b-x_3)}\right\} &= 0\\
\frac{\zeta_c}{(\xi_c-x_5)(\xi_c-x_6)} - \frac{\zeta_b}{(\xi_b-x_5)(\xi_b-x_6)} + \frac{\xi_c-\xi_b}{x_6-x_5}\left\{\frac{z_6}{(\xi_b-x_6)(\xi_c-x_6)} - \frac{z_5}{(\xi_b-x_5)(\xi_c-x_5)}\right\} &= 0.
\end{aligned}\right\}\quad (197$$

In jeder dieser Gleichungen kann man, wenn es vorteilhaft ist, η und y statt ξ und x setzen. Die drei unbekannten ζ_a, ζ_b und ζ_c berechnet man ganz eben so leicht mittelst dieser Gleichungen als mittelst ihrer expliziten Endgleichung. Über diese Endgleichung soll dann nur bemerkt werden, dass sie für die Bestimmung von ζ_a, ζ_b und ζ_c unbestimmt wird, wenn

$$\left.\begin{aligned}
&(\xi_c-x_1)(\xi_c-x_2)(\xi_a-x_3)(\xi_a-x_4)(\xi_b-x_5)(\xi_b-x_6) =\\
&= (\xi_a-x_1)(\xi_a-x_2)(\xi_b-x_3)(\xi_b-x_4)(\xi_c-x_5)(\xi_c-x_6),
\end{aligned}\right\}\quad (198)$$

das heisst, wenn die 6 gegebenen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Dann müssen, weil die Funktion für endliche Argumente keinen unendlichen Wert bekommen kann, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 und z_6 eine Bedingung erfüllen, infolge welcher einer von ihnen durch die anderen 5 bestimmt ist; und diese Bestimmung kann durch eine Interpolation der hier angegebenen Art ausgeführt werden. Soll man z. B. z_6 suchen, und passt der Punkt x_6, y_6 in der Kegelschnittgleichung (198), dann kann man, weil (ξ_a, η_a) ausserhalb des Kegelschnitts fällt, den unbestimmbaren Wert für ζ_a willkürlich ansetzen. Daraus folgen dann die Werte für ζ_b und ζ_c. An der geraden Linie mit den Indices b, 5, c liegt der Punkt mit dem Index 6, und dessen Funktionswert wird durch Ein-Argument-Interpolation bestimmt.

Liegen die 6 Punkte nicht auf einem Kegelschnitt, ist oben das zur Ausführung der Interpolation durch Rechnung nötige angegeben. Will man aber die Interpolation allein durch geometrische Konstruktion ausführen, kann sie damit eingeleitet werden, dass man durch die 5 der gegebenen Punkte einen Kegelschnitt legt und mittelst des Satzes von Pascal dessen Durchschnittspunkt mit einer geraden Linie durch den 6[ten] Punkt und einen der gegebenen konstruirt. Die Durchschnittspunkte für gerade Linien durch die Punkte 1 und 2 samt 4 und 5 und zwischen 2 und 3 samt 5 und 6 werden durch eine gerade Linie verbunden, und von deren Durchschnittspunkt mit der Linie durch die Punkte 3 und 4 zieht man eine gerade Linie durch den Punkt 1. Der Punkt 6′, in dem diese die Linie (5, 6) schneidet, wird

dann auf Kegelschnitt mit den Punkten 1, 2, 3, 4 und 5 liegen. Wir können deshalb zu dem Funktionswert für 6′ interpoliren, indem wir einen Wert ζ_a für den Wert von dem Durchschnittspunkt der Linien (1, 2) und (3, 4) willkürlich wählen. Damit können wir dann die Ein-Argument-Interpolationen für ζ_b in dem Durchschnittspunkt von (3, 4) und (5, 6′, 6) und ζ_c in dem Durchschnittspunkt von (1, 2) und (5, 6′, 6) graphisch konstruiren. Interpolirt man dann mit den Werten ζ_b, ζ_c und z_5, wird man im Allgemeinen für z_6 einen von dem gegebenen abweichenden Wert finden; er interessirt uns aber nicht; jedoch für den Punkt 6′ giebt diese Interpolation den korrekten Funktionswert.

Damit haben wir erreicht, dass wir drei Funktionswerte für Punkte an der Linie (5, 6′, 6) kennen, nämlich die beiden gegebenen für 5 und 6 und den für 6′ jetzt konstruirten. Und jetzt kann man gleich die richtigen Funktionswerte ζ_b und ζ_c von Punkten an dieser nämlichen geraden Linie konstruiren, und mit jedem von diesen konstruirt man dann längs der Linien (3, 4) oder (1, 2) den Funktionswert ζ_a, wie man ihn vom Anfange der Konstruktion hätte annehmen sollen. Durch die Doppelbestimmung erreicht man eine gute Kontrolle.

Jetzt kennen wir genügend, um zu jedem 7$^{\text{ten}}$ Punkt korrekt zu interpoliren, er mag auf unserem Kegelschnitt liegen oder nicht.

§ 46.

Bei der Konstruktion von Wetterkarten und dergleichen wird man sich wo möglich auf Angaben von so vielen Stationen zu stützen suchen, dass man ebenso interpoliren kann wie für Funktionen 1$^{\text{sten}}$ Grades. Nicht selten liegen jedoch die Stationen so zerstreut, dass sowohl dieses Verfahren selbst misslich ist, als auch, dass die Routine nicht genügt, mit der man die Beobachtungen unter einander ausgleicht, und ausserdem auf den Zusammenhang mit anderen Erscheinungen als derjenigen, die dargestellt werden soll, Rücksicht nimmt, z. B. auf den Wind, wenn von dem Barometerstand die Rede ist.

Interpolationen nach Funktionen 2$^{\text{ten}}$ Grades können dort nützlich sein. Dazu ist nur erforderlich, dass man wenigstens 6 Stationen auf einem Areal hat, innerhalb welchen Areals nur selten mehr als 1 Merkpunkt vorkommt, Minimum, Maximum oder Sattelpunkt. Kann man darauf rechnen, dass im Laufe der Zeit dieselben festen Stationen die Grundlage von zahlreichen Interpolationen abgeben sollen, sowie auch, dass die Interpolationen auf eine Anzahl, stets konstant bleibender Punkte gerichtet werden, dann kann man sich in der Weise einrichten, dass jede Interpolation mittelst einer Rechenmaschine oder einer Faktorentafel, sogar in sehr kurzer Zeit, ausgeführt werden kann. Man kann Koeffizienten zu Multiplikation

mit den Funktionswerten von den 6 Stationen im Voraus berechnet haben, so dass die Summe der 6 Produkte der interpolirte Wert der Funktion für einen fraglichen Punkt ist. Man verschafft sich jeden dieser Koeffizienten durch Interpolation unter Voraussetzung, dass die Funktion in der entsprechenden Station den Wert 1, aber für jede der anderen Stationen den Wert 0 gehabt hat.

B e i s p i e l. In einer äquidistanten Tafel mit den Argumenten x und y in der vorteilhaftesten Gestalt:

$y =$	$x = 0$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
0	⊗	0	⊗	0	⊗
$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
1	⊗	0	⊗	0	0
$\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0
1	⊗	0	0	0	0

denkt man sich die mit ⊗ bezeichneten 6 Positionen gegeben, während für die durch 0 bezeichneten interpolirt werden soll. Bestimme die Koeffizienten, durch deren Multiplikation mit den Beobachtungen die Interpolation auf die Addition der 6 Produkte reduzirt wird.

Man findet für $8f(x, y)$ die Interpolations Koeffizienten

$y =$	$x = 0$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$2 = x$	$y =$
0	8, 0, 0 0, 0 0	3, 6, —1 0, 0 0	0, 8, 0 0, 0 0	—1, 6, 3 0, 0 0	0, 0, 8 0, 0 0	0
$\frac{1}{2}$	3, 0, 0 6, 0 —1	0, 4, —1 4, 2 —1,	— 1, 4, 0 2, 4 — 1	0, 0, 3 0, 6 — 1	3, — 8, 8 — 2, 8 — 1	$\frac{1}{2}$
1	0, 0, 0 8, 0 0	—1, 2, 1 4, 4 0	0, 0, 0 0, 8 0	3, — 6, 3 — 4, 12 0	8, —16, 8 — 8, 16 0	1
$\frac{3}{2}$	—1, 0, 0 6, 0 3	0, 0, —1 0, 6 3	3, —4, 0 — 6, 12 3	8, —12, 3 —12, 18 3	15, —24, 8 —18, 24 3	$\frac{3}{2}$
2	0, 0, 0 0, 0 8	3, —2, —1 —8, 8 8	8, —8, 0 —16, 16 8	15, —18, 3 —24, 24 8	24, —32, 8 —32, 32 8	2
$y =$	$x = 0$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$2 = x$	$y =$

Also ist z. B. $8f(\frac{3}{2}, 2) = 15f(0,0) - 18f(1,0) + 3f(2,0) +$
$-24f(0,1) + 24f(1,1) +$
$+8f(0,2).$

§ 47.

Will man das Resultat einer Interpolation nach einer Funktion 2ten Grades mit 2 Argumenten durch ein Kurven-System ausdrücken in der für Isobaren und Isohalinien u. s. w. üblichen Weise, mit Angabe der Kurven, für welche der Funktionswert konstant ist, wird die Figur ein konzentrisches System von gleichliegenden, ähnlichen Kegelschnitten zeigen. Interpolation des 1sten Grades würde ein System von äquidistanten, parallelen, geraden Linien geben. Bei der üblichen Konstruktion von solchen Iso-Linien zieht man eben daraus Vorteil, indem man voraussetzt, dass die Stationen, von denen Beobachtungen vorliegen, einander nahe genug liegen, um die Interpolation des 1sten Grades zu gestatten. In jedem Dreieck zwischen den nächsten Stationen bestimmt man durch indirekte Interpolation längs jeder der Seiten, die Punkte, wo die Funktion die für die Isolinien gewählten Werte haben würde; man verbindet zwischen zwei der Seiten die übereinstimmenden Punkte durch gerade Linien, und man sieht kraft der Voraussetzung, dass Interpolation des 1sten Grades erlaubt ist, diese Linienstücke für Tangenten der Iso-Linien an.

Hie und da, besonders an den Rändern der Karte, liegen die Stationen doch oft so zerstreut, dass diese Voraussetzung fehlschlägt. Man verwendet ungern die bedeutende Arbeit, die, wie wir es gesehen haben, eine Interpolation des 2ten Grades erfordert; und wenn auch die Linien, welche die Interpolation des 1sten Grades in diesen Fällen giebt, weder Tangenten der Iso-Linie noch ein Stück derselben, sondern nur recht abweichende Korden sind, wird man doch an jeder von diesen im Allgemeinen zwei Punkte finden, die mit Recht zu der Iso-Linie gehören.

Kann man nun nicht diese Punkt-Paare bestimmen?

In dem speziellen Fall, wo die Iso-Linien konzentrische Kreise sind, ist dies sogar sehr leicht, also wenn man voraussetzen kann, dass die Funktion die Form

$$z = a + bx + cy + d(x^2 + y^2) \tag{199}$$

hat.

Die Interpolationsformel kann man hier als die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} 1, & x\,, & y\,, & x^2+y^2, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & x_1^2+y_1^2, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & x_2^2+y_2^2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & x_3^2+y_3^2, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & x_4^2+y_4^2, & z_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{200}$$

schreiben, und sie zeigt, dass im Allgemeinen 4 gegebene Tafelwerte (Indices 1, 2, 3, 4) zur Bestimmung von z für die Argumente x und y erforderlich sind. Unbestimmtheit tritt ein, wenn die 4 Punkte an einem Kreise liegen. Dann ist aber $x^2 + y^2$

für alle Punkte dieselbe lineare Funktion von x und y. In diesem Falle lässt sich die Unbestimmtheit heben, indem man eine Spalte und eine Zeile in der Determinante auslässt, welche dadurch

$$\begin{vmatrix} 1, & x\,, & y\,, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{201}$$

wird.

Was den um die Stationen (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3), umschriebenen Kreis betrifft, geschieht die Interpolation also gesetzmässig, wie bei Funktionen des 1^{sten} Grades. In Fällen dieser Art fordert die Konstruktion der Iso-Linien also nur folgendes über das gewöhnliche hinaus: dass um alle allzu grossen Stations-Dreiecke Kreise umschrieben werden, und dass von den nach der Methode 1^{sten} Grades konstruirten geraden Linien nur die Durchschnittspunkte mit dem umschriebenen Kreis als zu den Iso-Linien gehörend betrachtet werden.

In der Nähe eines solchen Maximums oder Minimums, um welches die Iso-Linien ungefähr zirkulare Form haben, wird man diese Konstruktion anwenden können. Aber nahe an den Sattelpunkten haben die Isolinien nicht zirkulare, sondern hyperbolische Form, und die Methode wird irreleitend; und nicht viel besser geht es, wenn die Isolinien sich parabolischer Form oder der Form von stark exzentrischen Ellipsen nähern.

Man kann aber die Methode generalisiren. Wie die Erfahrungen aus den täglichen Wetterkarten zeigen, wird man die Isolinien ohne Dreieckkonstruktionen aus freier Hand so zeichnen können, dass ihr Verlauf einigermassen richtig angegeben wird, und dass man, besonders wo die Glieder des 2^{ten} Grades fühlbar sind, Auskunft über die Richtungen der Assymptoten der Iso-Hyperbeln oder über die Exzentrizität und Achsen-Richtung der Iso-Ellipsen bekommt, so dass man gleichliegende und ähnliche Figuren zeichnen kann. Damit würde man die Verhältnisse zwischen den Koeffizienten der 3 Glieder zweiten Grades

$$+fx^2 + gxy + hy^2$$

in der Interpolationsformel bestimmen können. Allein dann wird man für Stationen, welche auf einem, den Iso-Linien gleichliegenden, ähnlichen — jedoch nicht konzentrischen — Kegelschnitt liegen, die Determinantengleichung der Interpolationsformel der Summe $fx^2 + gxy + hy^2$ gegenüber in derselben Weise behandeln können, welche oben auf $x^2 + y^2$ angewandt wurde. Auch hier kann die Aufgabe auf Interpolation 1^{sten} Grades reduzirt werden. Nur sind es nicht mehr Kreise, die um jedes Stations-Dreieck umschrieben werden sollen, sondern dem Verlauf der Isolinien an der

angegebenen Stelle gleichliegende, ähnliche Figuren. Diese müssen nach Augenmass gezeichnet werden, oder auch muss man nach bestem Erachten die Punkte absetzen, in denen sie die geraden Linienstücke schneiden werden.

NACHTRAG

betreffend

die Berechnung des Wertes unendlicher Reihen.

§ 48.

Wenn man sich die Aufgabe stellt, — so weit es möglich ist, — den Eigenwert*) jeder unendlichen Reihe zu berechnen, muss man sich klar machen, dass — weil die unendliche Reihe eine Summe von unendlich vielen Addenden ist, — nicht alle Sätze, Summen betreffend, auch für diese gelten. Das kommutative Prinzip, — der Satz, dass die Ordnung der Addenden gleichgültig ist, — gilt nur für unbedingt konvergente Reihen, nicht für divergente, oder, bestimmter ausgedrückt, nur für endlich begrenzte Teile derselben.

Auf die unendlichen Reihen im Allgemeinen dürfen nur die Umgestaltungen angewandt werden, welche allein durch die Eindeutigkeit der Addition und der Subtraktion begründet werden können und durch das associative Prinzip der Addition, dass die Ordnung, in welcher die Additionen ausgeführt werden, gleichgültig ist, wenn nur die Ordnung der einzelnen Addenden nicht verändert wird. Nur so kann es möglich sein, für die Summe jeder unendlichen Reihe von eindeutigen Gliedern einen eindeutig bestimmten Wert anzugeben. Um dieses hervorzuheben, führen wir für einen also beschränkten Summen-Begriff den Namen «Eigenwert der Reihe» ein.

Zur Definition des Begriffes «Eigenwert der Reihen» verlangen wir, dass bei der Addition (Subtraktion) zweier Reihen «Glied für Glied» ihre Eigenwerte addirt (subtrahirt) werden sollen. Das heisst, wir beschränken die Freiheit dieser Operationen so, dass sie durchgehends mit den allgemeinen Gliedern von derselben Ordnung auszuführen sind:

$$\Sigma u_n + \Sigma v_n = \Sigma(u_n + v_n).$$

---

*) Vergl. meine Abhandlung: Sur la valeur propre des séries divergentes, Oversigt over det kgl. d. Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, København 1908.

Dabei ist es jedoch erlaubt, die Summe jeder konvergenten Reihe als ihren Eigenwert festzuhalten. Wenn es gelingt, für eine divergente Reihe den Eigenwert zu bestimmen, werden die Eigenwerte einer Mannigfaltigkeit von anderen divergenten Reihen sich infolge dieser Definition bestimmen lassen.

Aus dem associativen Prinzip ergiebt sich indess, dass es gestattet ist, sowohl gesetzmässig bestimmte Anzahlen von einander folgenden Gliedern in Partialsummen zu sammeln, welche Glieder einer neuen Reihe mit dem unverändert gleichen Eigenwert werden, und dass umgekehrt, jedes Reihenglied in gesetzmässiger Weise in Addenden aufgelöst werden kann.

Der Eigenwert der Reihe verändert sich deshalb nicht durch das Verschieben. Es ist gestattet, eine willkürliche Anzahl der vorderen Glieder der Reihe in dem ersten Glied zu sammeln. Die Ordnungszahl der übrigen Glieder wird dadurch mit einer konstanten ganzen Zahl verkleinert (negatives Verschieben). Es ist ebenfalls gestattet, am Anfang der Reihe, eine willkürliche Anzahl neue Glieder hinzuzufügen, wenn sie oder jedenfalls ihre Summe gleich 0 sind (positives Verschieben).

Ohne Veränderung des Eigenwerts kann jede Reihe in eine Summe von n Reihen aufgelöst werden, von welchen die erstere die Glieder mit Ordnungszahlen der Form $m \cdot n$ aufnimmt, die letztere die Glieder der Form $mn - 1$.

Der Eigenwert einer Reihe wird multiplizirt, wenn jedes ihrer Glieder mit demselben Faktor multiplizirt wird.

Eine Reihe wird mit einer anderen endlichen oder unendlichen Reihe multiplizirt, und zwar derart, dass dieselbe erst positivem Verschieben über Plätze von $1, 2, \ldots, n$ Gliedern unterworfen wird, und dass die derart gebildeten Reihen alsdann jede mit ihrem Glied der Faktor Reihe multiplizirt werden. Schliesslich werden die herausgekommenen Reihen Glied für Glied addirt.

Die gesetzmässig fortschreitenden unendlichen Reihen können untereinander derart geordnet werden, dass man im unendlich Fernen die Criterien sucht, während von ihrem endlichen Anfang abgesehen wird. Dass solche Einteilung in erster Linie die Konvergenzfrage berücksichtigen muss, ist einleuchtend. Die allgemein bekannten Konvergenz-Criterien beziehen sich aber nur auf die Grenzfälle und sind in ungeänderter Form auf die unzweifelhaft divergenten oder konvergenten Reihen, die auch eingeteilt werden müssen, unanwendbar. In § 15 habe ich deshalb das Duhamelsche Criterium so umgestaltet, dass der Grenzcharakter nicht nur über Divergenz und Halbkonvergenz entscheidet, sondern auch im Allgemeinen nach der Grenz-Quote einen zweiten Einteilungsgrund abgiebt.

Wie in der citirten Abhandlung „Sur la valeur propre“ soll auch hier eine unendliche Reihe von Charakteristiken angewandt werden, die über Divergenz weiter nichts entscheiden, aber als Einteilungsgründe nützlich sind.

Vorausgesetzt dass die Grenzquote und der Grenzcharakter bestimmte von 0 verschiedene endliche Zahlenwerte haben, kann derselbe Algorithmus, der den Charakter mittelst Quote und Grenzquote bestimmte, zuerst eine Charakteristike

$$q''_n = n\left(1 - \frac{q'_\infty}{q'_n}\right)$$

bestimmen; und wenn ihr Grenzwert q''_∞ u. s. w. ebenfalls einen bestimmten endlichen Wert hat, können im Allgemeinen nach

$$q_n^{(r+1)} = n\left(1 - \frac{q_\infty^{(r)}}{q_n^{(r)}}\right) \tag{202}$$

die weiteren Charakteristiken mit ihren Grenzwerten berechnet werden. Die Reihe dieser Operationen wird als endlich abgeschlossen, wenn ein $q_n^{(r)}$ unabhängig von n konstant ausfällt. Dann würde $q_n^{(r+1)} = 0$, $q_n^{(r+2)} = \infty$ und so weiter abwechseln.

Die direkte Abhängigkeit zwischen der Quote und den einzelnen Charakteristiken hat die Form des Kettenbruches: z. B.

$$q_n^{V} = n - \frac{nq_\infty^{IV}}{n}\Big/ - \frac{nq'''_\infty}{n}\Big/ - \frac{nq''_\infty}{n}\Big/ - \frac{nq'_\infty}{n}\Big/ - \frac{nq_\infty}{q_n} \tag{203}$$

und umgekehrt

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = q_n = \frac{nq_\infty}{n}\Big/ - \frac{nq'_\infty}{n}\Big/ - \frac{nq''_\infty}{n}\Big/ - \frac{nq'''_\infty}{n}\Big/ - q_n^{IV}, \tag{204}$$

den Konvergenten von diesem entsprechend hat man exakt

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= q_n = \frac{nq_\infty}{n - q'_n} = \frac{(n - q''_n)\,q_\infty}{n - q'_\infty - q''_n} = \frac{[n^2 - n(q''_\infty + q'''_n)]\,q_\infty}{n^2 - n(q'_\infty + q''_\infty + q'''_n) + q'_\infty q'''_n} = \\ &= \frac{[n^2 - n(q''_\infty + q'''_\infty + q^{IV}_n) + q''_\infty q^{IV}_n]\,q_\infty}{n^2 - n(q'_\infty + q''_\infty + q'''_\infty + q^{IV}_n) + q'_\infty q'''_\infty + q'_\infty q^{IV}_n + q''_\infty q^{IV}_n} = \ldots \end{aligned}\right\} \tag{205}$$

Haben zwei Reihen die Grenz-Quote, den Grenz-Charakter und alle Grenz-Charakteristiken gemeinsam, unterscheiden sie sich nur durch die Multiplikation der Eigenwerte und aller Glieder mit einem konstanten Faktor.

Mittelst der Charakteristiken können also die Reihen eingeteilt und klassifizirt werden. Der Unterschied zwischen den Reihen, welche in einer langen Folgereihe von Charakteristiken übereinstimmen, beschränkt sich wesentlich auf den verhältnismässig leicht zugänglichen endlichen Anfang. Bezüglich dieser Klassifizirung folgende Sätze:

Zwei Reihen Σu_n und Σv_n, deren Grenz-Quoten ungleich grosse Modulen haben, werden addirt. Ihre Summe wird dann unverändert dieselbe Grenz-Quote haben wie die, deren Modulus am kleinsten war. Die geringst konvergente Reihe bestimmt allein die Grenz-Quote der Summe. Wird die Quote der Reihe Σu_n mit q bezeichnet, die der Σv_n mit p und die Quote der Summe mit Q, bekommt man

$$Q_n = \frac{u_n + v_n}{u_{n+1} + v_{n+1}} = q_n p_n \frac{u_n + v_n}{u_n p_n + v_n q_n} \tag{206}$$

und

$$\frac{u_{n+r}}{v_{n+r}} = \frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{p_n \cdot p_{n+1} \cdots p_{n+r-1}}{q_n \cdot q_{n+1} \cdots q_{n+r-1}}. \tag{207}$$

Macht man hier die Ordnungszahl n so gross, dass die Quoten mit höheren Ordnungszahlen als die Grenz-Quoten q_∞ und p_∞ gesetzt werden können, und nimmt man $r = \infty$, wird man ohne Rücksicht auf den endlichen Wert von $\frac{u_n}{v_n}$ finden, dass wenn $|q_\infty| > |p_\infty|$, wird $\frac{u_\infty}{v_\infty} = 0$ und folglich $Q_\infty = p_\infty$, wodurch der Satz bewiesen ist.

Wenn die Grenz-Quoten beider Reihen gleich grosse Modulen haben, wird nach (206) $\frac{1}{Q_\infty}$ eine Mittelzahl zwischen $\frac{1}{q_\infty}$ und $\frac{1}{p_\infty}$ sein, mit den Gewichten u_∞ und v_∞ berechnet; doch im Allgemeinen wird, weil in (207) $\frac{p_\infty}{q_\infty}$ sich einer Wurzel der Einheit nähert, das Verhältnis zwischen diesen Gewichten periodisch schwanken. Die Summenreihe wird dann keine bestimmte Grenz-Quote haben. Haben die Reihen identisch dieselbe Grenz-Quote, wird im Allgemeinen die Summe auch dieselbe Grenz-Quote haben $q_\infty = p_\infty = Q_\infty$; davon muss nur der Fall ausgeschlossen werden, wo $u_\infty + v_\infty = 0$ ist, was Q_∞ unbestimmt oder unendlich gross machen würde; das heisst, dass wenn zwei Reihen mit derselben Grenz-Quote und demselben Grenz-Wert des allgemeinen Gliedes subtrahirt werden, kann die Grenz-Quote der Differenz verändert werden. Nach dem ersten dieser Sätze kann Q_∞ keinen kleineren Modulus bekommen als $|p_\infty|$ und $|q_\infty|$. Falls er sich deshalb ändert, muss er sich vergrössern. Es eröffnet sich also eine Möglichkeit der Verbesserung für die Konvergenz der Reihen durch Subtraktion einer Reihe mit genau derselben Grenz-Quote.

In dieser Weise kann es gelingen, den Eigenwert einer divergenten Reihe auf die Summirung einer konvergenten oder endlichen Reihe zu reduziren, vorausgesetzt dass man den Eigenwert einer sehr ähnlichen divergenten Reihe im Voraus kennt.

Zwei Reihen mit derselben Grenz-Quote, aber verschiedenem Grenz-Charakter, werden addirt oder subtrahirt und es wird vorausgesetzt, dass die Grenz-Quote dabei nicht reduzirt wird; alsdann wird der Grenz-Charakter der Summe derselbe sein, wie der des am geringsten konvergenten Addenden, das heisst der Grenz-Charakter, dessen reeller Teil am wenigsten positiv oder am meisten negativ ist, geht auf die Summe über.

Wir bezeichnen die gemeinsame Grenz-Quote mit q, lassen die Reihe Σu_n den Grenz-Charakter q' haben, während Σv_n den Grenz-Charakter p' hat. Dann wird infolge (205).

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{u_n+v_n} = \frac{1}{q} - \frac{q_n' u_n + p_n' v_n}{u_n+v_n} \cdot \frac{1}{nq},$$

und dadurch $Q_\infty = q$, wenn $u_n + v_n \gtrless 0$.

Alsdann findet man

$$Q_n' = \frac{q_n' u_n + p_n' v_n}{u_n + v_n}, \tag{208}$$

zum Schätzen der Grenze für diese Mittelzahl hat man

$$\frac{u_{n+r}}{v_{n+r}} = \frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{n-q_n'}{n-p_n'} \cdot \frac{n+1-q_{n+1}'}{n+1-p_{n+1}'} \cdots \frac{n+r-1-q_{n+r-1}'}{n+r-1-p_{n+r-1}'}. \tag{209}$$

Hier sieht man nun erstens, indem man r bis ins Unendliche wachsen lässt, dass die imaginären Teile von q_∞' und p_∞' keine Bedeutung für das Resultat bekommen, und ferner, indem beide q_∞' und p_∞' zu ihren reellen Gliedern reduzirt werden, dass je nachdem die Subtrahenden des Zählers oder Nenners mit wachsenden reellen Ordnungszahlen die am meisten positiven Werte haben, $\frac{u_\infty}{v_\infty}$ entweder 0 oder ∞ wird, vergl. (41, 5). Im ersten Fall wird $Q_\infty' = p_\infty'$, im zweiten Fall $Q_\infty' = q_\infty'$, wie unser Satz lautet.

Falls die reellen Teile von q_∞' und p_∞' gleich gross sind, kann das Gewichtverhältnis $\frac{u_\infty}{v_\infty}$ für die Mittelzahl endlich werden und bestimmten Wert bekommen.

Ist $q_\infty' = p_\infty'$ wird auch $Q_\infty' = p_\infty' = q_\infty'$, es sei denn, der Fall wäre eine Subtraktion, wo $u_\infty + v_\infty = 0$ ist, ohne dass Q_∞ deshalb von q verschieden würde. In diesem Fall aber müsste nach dem Hauptsatz der reelle Teil von Q_∞' grösser werden, niemals kleiner als der für q_∞' und p_∞' gemeinsame. Auch so ist Aussicht auf Verbesserung der Konvergenz (oder Halbkonvergenz) durch Subtraktion einer ähnlichen Reihe.

Falls ausser der Quote und dem Charakter noch eine Anzahl Charakteristiken dieselben Grenzwerte in den beiden Reihen haben und erst $q_\infty^{(r)}$ in Σu_n verschieden von $p_\infty^{(r)}$ in Σv_n ist, wird die Summe der Reihen (im Allgemeinen) die Mittelzahl

$$Q_\infty^{(r)} = \frac{q_\infty^{(r)} u_\infty + p_\infty^{(r)} v_\infty}{u_\infty + v_\infty} \tag{210}$$

als Charakteristik haben nach der Reihe der übereinstimmenden Charakteristiken.

Nach der Konvergent-Gleichung (205) kann man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_n - D_n q_n^{(r)}}{A_n - C_n q_n^{(r)}} \quad \text{und} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{B_n - D_n p_n^{(r)}}{A_n - C_n p_n^{(r)}}$$

schreiben, wo A_n, B_n, C_n und D_n ganze Funktionen von n sind, mit reinen Potenzen von n im höchsten Gliede, welche in A_n und B_n 1 Grad höher sind als in C_n und D_n. Daraus folgt, wenn $u_\infty + v_\infty \gtrless 0$ und also die Grenz-Quote, der Charakter u. s. w. derselbe wird, dass die r^{te} Charakteristik

$$Q_n^{(r)} = \frac{(A_n - C_n p_n^{(r)}) q_n^{(r)} u_n + (A_n - C_n q_n^{(r)}) p_n^{(r)} v_n}{(A_n - C_n p_n^{(r)}) u_n + (A_n - C_n q_n^{(r)}) v_n} \tag{211}$$

wird mit dem angegebenen Grenz-Wert.

Das unendliche Produkt, welches $\frac{u_\infty}{v_\infty}$ durch $\frac{u_n}{v_n}$ bestimmt, konvergirt hier unbedingt zu einer endlichen und bestimmten Zahl, deshalb überwiegt die eine Reihe nicht absolut die andere, wie es bei Grenz-Quote und -Charakter der Fall ist.

Ist aber $v_\infty = -u_\infty$, sodass von der Subtraktion zweier fast ähnlicher Reihen die Rede ist, kann es wie gesagt passieren, dass schon Q_∞ für Konvergenz günstiger wird und im Allgemeinen wird dies mit Q'_∞ der Fall sein. Die Regel scheint hier zu sein, dass Q'_∞ soviel grösser als q'_∞ wird, wie die Anzahl von q''_∞ und höhere übereinstimmende Charakteristiken angiebt.

Die Bedeutung unseres letzten Hauptsatzes tritt zu Tage, wenn man nicht nur über eine, sondern über mehrere Reihen mit bekanntem Eigenwert und mit derselben Grenz-Quote und demselben Grenz-Charakter, wie eine zur Berechnung vorgelegte Reihe verfügt, und zwar kann man von diesen disponiblen Reihen andere bilden, welche ferner q''_∞ der gesuchten Reihe haben, aus diesen wieder Andere, welche auch q'''_∞ u. s. w mit derselben gemeinsam haben. Derart können alsdann Subtrahend-Reihen dargestellt werden, welche in dem unendlich fernen Teil der vorgelegten so nahe kommen, dass darauf eine Subtraktionsmethode zur Verbesserung von Reihen gebaut werden kann, vergl. § 50.

Durch das Verschieben einer Reihe über die Plätze einer ganzen reellen Anzahl Glieder verändern sich weder die Grenz-Quote noch der Grenz-Charakter ebenso wenig wie der Eigenwert der Reihe.

Dagegen vergrössert sich die Charakteristik q''_∞ durch positives Verschieben, Hinzufügen von a Null-Gliedern am Anfang der Reihe, mit a

$$p''_\infty = q''_\infty + a. \tag{212}$$

Insofern könnte der Name Verschiebungs-Charakteristik sehr wohl zu q''_∞ passen. Die höheren Charakteristiken verändern sich jedoch auch durch das Verschieben. Indem man durchgehends die Charakteristiken der vorgeschobenen Reihe mit p bezeichnet, findet man

$$\left.\begin{aligned} p'''_\infty &= q'''_\infty \frac{q''_\infty}{q''_\infty + a} \\ \text{und} \qquad p^{IV}_\infty &= q^{IV}_\infty + a + a\frac{q'''_\infty}{q''_\infty + a}. \end{aligned}\right\} \tag{213}$$

Es dürfte hier nahe liegen zu versuchen, die Charakteristiken mit anderen Merkzahlen, welche beim Verschieben invariant bleiben, zu ersetzen, z. B.

und
$$\left.\begin{aligned} p''_\infty \cdot p'''_\infty &= q''_\infty \cdot q'''_\infty \\ p^{IV}_\infty + p'''_\infty - p''_\infty &= q^{IV}_\infty + q'''_\infty - q''_\infty , \end{aligned}\right\} \tag{214}$$
meines Erachtens nach würde jedoch mehr dabei verloren als gewonnen werden.

Wenn eine Reihe mit bestimmten Grenzen für Quote und Charakteristiken über Plätze einer beliebigen Anzahl a Glieder verschoben und mit q^a_∞ multiplizirt wird, wird die Uebereinstimmung zwischen den Grenzwerten der entsprechenden Glieder erreicht sein. Subtrahirt man alsdann die verschobene Reihe von der ursprünglichen, kann in der Restreihe $\Sigma v_n = \Sigma (u_n - u_{n+a} \cdot q^a_\infty)$ sogar die Grenz-Quote vergrössert worden sein. Die Verbesserung der Konvergenz, welche man im Allgemeinen erlangen wird, besteht doch nur darin, dass der Grenz-Charakter mit einer Einheit vergrössert wird, $p_\infty = q_\infty$ und $p'_\infty = q'_\infty + 1$. Jedoch diese Verbesserung ist denn auch sicher (jedenfalls, wenn $q'_\infty \gtrless 0$). Und da die Operation, wobei der Eigenwert mit $(1 - q^a_\infty)$ multiplizirt wird, leicht wiederholt werden kann, ergiebt sie eine wichtige Methode — die Multiplikations-Methode — zur Förderung von langsamer Konvergenz und zur Umwandlung von divergenten Reihen in halbkonvergente.

Der Beweis ist einfach genug in dem Fall $a = 1$, wo
$$v_n = u_n - q_\infty u_{n+1} = u_n \frac{q'_\infty}{n - q''_n} ,$$
dann ist nach Verkürzung mit $q'_\infty (n - q''_n)$
$$p_n = \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{n + 1 - q''_{n+1}}{n - q'_\infty - q''_n} q_\infty ,$$
und ist dann
$$p_\infty = q_\infty ,$$
ist
$$p'_n = \frac{n (1 + q'_\infty + q''_n - q''_{n+1})}{n + 1 - q''_{n+1}} ,$$
also, wenn q''_∞ eine bestimmte Zahl ist
$$p'_\infty = 1 + q'_\infty . \tag{215}$$

Schwieriger ist der Beweis für den allgemeinen Satz. Wenn
$$w_n = u_n - q^a_\infty u_{n+a} ,$$
ist infolge (205)
$$\frac{u_{n+a}}{u_n} = \frac{n - q'_\infty - q''_n}{n - q''_n} \cdot \frac{n + 1 - q'_\infty - q''_{n+1}}{n + 1 - q''_{n+1}} \cdots \frac{n + a - 1 - q'_\infty - q''_{n+a-1}}{n + a - 1 - q''_{n+a-1}} \cdot q_\infty^{-a} ,$$
und wenn man der Kürze halber
$$\Pi = \frac{n + 1 - q'_\infty - q''_{n+1}}{n + 1 - q''_{n+1}} \cdots \frac{n + a - 1 - q'_\infty - q''_{n+a-1}}{n + a - 1 - q''_{n+a-1}}$$

schreibt,

$$p_n = \frac{w_n}{w_{n+1}} = \frac{(n-q'_\infty - q''_n)\,\Pi - (n-q''_n)}{(n+a-q'_\infty - q''_{n+a})\,\Pi - (n+a-q''_{n+a})} \cdot \frac{n+a-q''_{n+a}}{n-q'_\infty - q''_n} \cdot q_\infty. \tag{216}$$

Im Allgemeinen, wenn $p_\infty = q_\infty$, folgt hieraus

$$p'_n = nq'_\infty \frac{n(\Pi-1) - a - q'_\infty \Pi - q''_n \Pi + q''_{n+a}}{(n(\Pi-1) - q'_\infty \Pi - q''_n(\Pi-1)) \cdot (n+a-q''_{n+a})}. \tag{217}$$

Um p'_∞ zu bestimmen, ist es nicht genügend, dass nur $\lim\limits_{n=\infty} \Pi = 1$, erforderlich ist ferner Bestimmung von $\lim\limits_{n=\infty} n(\Pi-1)$. Durch Entwicklung der ersten Glieder in obenstehender Formel für Π findet man nun $\lim\limits_{n=\infty} n(\Pi-1) = q'_\infty(1-a)$.

Folglich wird nach Verkürzung mit q'_∞

$$p'_\infty = \frac{a(q'_\infty+1) + \lim\limits_{n=\infty}(q''_n - q''_{n+a})}{a}, \tag{218}$$

also wenn q''_∞ einen bestimmten endlichen Wert hat,

$$p'_\infty = q'_\infty + 1. \tag{215}$$

§ 49. Die Multiplikations-Methode.

Für die wirkliche Verbesserung der Reihen hat die Multiplikations-Methode den grossen Vorzug, dass sie nichts Anderes voraussetzt, als dass die Grenz-Quote als eine bestimmte Zahl bekannt ist, welche jedoch offenbar sowohl von 0 als auch von 1 verschieden sein muss.

Aus stilistischen Gründen wollen wir indess im Folgenden die Methode derart modifiziren, dass das allgemeine Glied in der multiplizirten Reihe mit derselben Ordnungszahl bezeichnet wird, wie die höchste, nicht wie die niedrigste Ordnungszahl der für ihre Berechnung angewandten Glieder der vorgelegten Reihe. Indem wir voraussetzen, dass in dieser Reihe das erste Glied u_1 ist, also dass $u_n = 0$, wenn $n = 0$ ist oder negativ, haben wir im einfachsten Fall

$$v_n = u_n - \frac{u_{n-1}}{q_\infty} \tag{219}$$

und für den Eigenwert der Reihe

$$\Sigma v_n = \left(1 - \frac{1}{q_\infty}\right) \Sigma u_n. \tag{220}$$

Für doppelte Anwendung der Multiplikations-Methode haben wir

$$w_n = u_n - 2\frac{u_{n-1}}{q_\infty} + \frac{u_{n-2}}{q_\infty^2}$$

und

$$\Sigma w_n = \left(1 - \frac{1}{q_\infty}\right)^2 \Sigma u_n.$$

Im Allgemeinen ist die durch die Multiplikations-Methode umgewandelte Reihe mit der im § 36 angewandten Bezeichnung eine Summe von qualifizirten Differenzen der Glieder der vorgelegten Reihe.

Selbstverständlich ist es auch gestattet, andere Faktoren anzuwenden, als die reziproke Grenz-Quote in den qualifizirten Differenzen, womit die Multiplikations-Methode arbeitet, und es kann viel dadurch ausgerichtet werden.

Man kann so z. B. die Schwierigkeiten bei einem bis ins Unendliche fortdauernden periodischen Schwanken der Quote überwinden, nämlich wenn die Reihe sich der rekurrenten Form nähert, wo $au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2} + \ldots = 0$ ist. Und namentlich kann man schwierigen Anfängen der Reihen gegenüber vorteilhaft Quoten mit endlichen Ordnungszahlen q_n anstatt Grenz-Quoten q_∞ anwenden, besonders liegt es nahe, die Quote zwischen den beiden höchsten berechneten Gliedern zu brauchen, wenn man es aufgeben muss, eine grössere Anzahl von Gliedern zu berechnen. Gelegentlich kann die Multiplikation der Reihe mit $1 - \frac{u_{n-1}}{u_n}$ zu wiederholen sein. Bei den im engsten Sinne halbkonvergenten Reihen, deren Glieder immerwährend Vorzeichen wechseln, lässt sich mitunter Bedeutendes erreichen durch das Bilden von Mittelzahlen und Mittelzahls-Mittelzahlen mit gleichen Gewichten, vor Allem, wenn die Grenz-Quote konstant ist. Bei all diesem darf ja nicht vergessen werden, dass man sich nur, wenn man die Grenz-Quote selbst berücksichtigt, halbkonvergenten Reihen gegenüber Annäherung an den wirklichen Eigenwert der Reihe sichern kann.

Zur Durchführung der Multiplikations-Methode kann es oft nützlich sein, das ganze Schema mit den qualifizirten Differenzen auszurechnen. Notwendig ist es aber nicht. Hat man die vorgelegte Reihe summirt, können ihre Summen gebraucht werden, indem man nur Glieder der höchsten Ordnungen in der Anzahl modifizirt, welche angiebt, wie oft die Multiplikations-Methode mit gleichen oder verschiedenen Faktoren hätte angewandt werden sollen. Ein Beispiel wird die allgemeine Regel hervortreten lassen. Die Faktoren seien: $1-a$, $1-b$, $1-c$, $1-d$ und $1-e$.

Ihr Gesammtprodukt wird nach Potenzen des gemeinsamen Minuenden entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} f &= (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)(1-e) = \\ &= 1^5 + k_1 1^4 + k_2 1^3 + k_3 1^2 + k_4 1 + k_5. \end{aligned}\right\} \quad (221)$$

Dann hat man nach Reduktion auf die ursprüngliche Einheit für die Summe s'_n der n ersten Glieder der durch die Multiplikations-Methode verbesserten Reihe

$$s'_n = s_{n-5} + \frac{1}{f}\left\{\begin{array}{c} (f-k_5)u_{n-4} + (f-k_5-k_4)\,u_{n-3} + \\ + (1+k_1+k_2)\,u_{n-2} + (1+k_1)\,u_{n-1} + u_n \end{array}\right\}, \quad (222)$$

wo s_{n-5} die Summe der unveränderten $n-5$ ersten Glieder der vorgelegten Reihe ist.

Da die eigentliche Multiplikations-Methode mit Faktoren wirkt, welche eben die Potenzen des Binoms $\left(1-\frac{1}{q_\infty}\right)$ sind, ist es selbstverständlich die Binomreihe

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)^{q'-1} = 1+\frac{1-q'}{1\cdot q}\left(1+\frac{2-q'}{2q}\left(1+\ldots\frac{n-q'}{nq}\left(1+\ldots;\right.\right.\right.$$

wo $q_\infty = q$ und $q'_n = q'_\infty = q'$, deren Berechnung die schönsten Beispiele für diese Methode aufweist. Bei jeder Multiplikation mit $\left(1-\frac{1}{q}\right)$ tritt nur eine neue Potenz derselben Grundzahl mit einem eine Einheit höheren Exponenten anstatt der ursprünglichen. Die divergenten Fälle werden dadurch halbkonvergent in steigendem Grad, und wenn die halbkonvergente Reihe unmittelbar vor den minimalen Gliedern unterbrochen wird, bilden deren Summen eine Reihenfolge, welche im Allgemeinen zu dem beabsichtigten Wert der Reihe konvergirt. Es ist nämlich leicht zu sehen, dass die Resultate der Halb-Konvergenz mit denen identisch sind, welche aus der im § 17 erwähnten günstigsten Zig-Zag Interpolation der Potenzfunktion entstehen.

Beispiel 1. Die Wirkung der Multiplikations-Methode auf Binomreihen, und deren zunehmende Halbkonvergenz, wird durch folgende Tabelle über die Zahlenkoeffizienten in $(1-4a)^{\frac{2r-1}{2}}$ veranschaulicht, wenn sie nach den in der Argumentkolonne angegebenen n^{ten} Potenzen von a entwickelt wird. Konvergent sind diese Reihen ja nur, wenn $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4}$.

Werte der Koeffizienten (n, r) in $(1-4a)^{\frac{2r-1}{2}} = \sum_{n=1}^{n=\infty}(n, r)\, a^{n-1}$.

n	$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$	$r=9$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	−2	−6	−10	−14	−18	−22	−26	−30	−36
3	6	−2	6	30	70	126	198	286	390	510
4	20	−4	4	−20	−140	−420	−924	−1716	−2860	−4420
5	70	−10	6	−10	70	630	2310	6006	12870	24310
6	252	−28	12	−12	28	−252	−2772	−12012	−36036	−87516
7	924	−84	28	−20	28	−84	924	12012	60060	204204
8	3432	−264	72	−40	40	−72	264	−3432	−51480	−291720
9	12870	−858	198	−90	70	−90	198	−1858	12870	218790
10	48620	−2860	572	−220	140	−140	220	−572	2860	−48620
11	184756	−9724	1716	−572	308	−252	308	−572	1716	−9724
12	705432	−33592	5304	−1560	728	−504	504	−728	1560	−5304
13	2704156	−117572	16796	−4920	1820	−1092	924	−1092	1820	−4420
14	10400600	−416024	54264	−12920	4760	−2520	1848	−1848	2520	−4760
15	40116600	−1485800	178296	−38760	12920	−6120	3960	−3432	3960	−6120
16	155117520	−5348880	594320	−118864	36176	−15504	8976	−6864	6864	−8976
17	601080390	−19389690	2005830	−371450	104006	−40698	21318	−14586	12870	−14586
18	2333606220	−70715340	6843420	−1179900	305900	−110124	52668	−32604	25740	−25740
für	$(1-4a)^{-\frac{1}{2}}$,	$(1-4a)^{\frac{1}{2}}$,	$(1-4a)^{\frac{3}{2}}$,	$(1-4a)^{\frac{5}{2}}$,	$(1-4a)^{\frac{7}{2}}$,	$(1-4a)^{\frac{9}{2}}$,	$(1-4a)^{\frac{11}{2}}$,	$(1-4a)^{\frac{13}{2}}$,	$(1-4a)^{\frac{15}{2}}$,	$(1-4a)^{\frac{17}{2}}$

Unmittelbar zeigt die Tabelle den Fall $a = 1$, also die Reihe für $(-3)^{-\frac{1}{2}}$ u. s. w. Hier und in ähnlicher Weise bei anderen positiven Werten von a giebt die Multiplikations-Methode nur Halbkonvergenz in der ungünstigsten Form, wo alle Glieder dasselbe Vorzeichen haben. Unter fortgesetzter Anwendung der Multiplikations-Methode steigen zudem die Minimalglieder in demselben Grad wie die Faktoren. Im Gegensatz dazu aber, was sich in den Reihen für negative Grundzahlen in anderen gebrochenen Potenzen z. B. $(1-9)^{-\frac{1}{3}}$ und $(1-9)^{-\frac{2}{3}}$ zeigt, sieht man, beim Summiren der Reihe, dass die Summe Vorzeichen wechselt, wenn man das minimale Glied passirt. In dem Fall $a = \frac{1}{2}$ ist die Summe vor dem Minimal-Gliede sogar geradezu $= 0$; und die Abweichungen hiervon sind jedenfalls so gering, dass sie kein Bedenken hervorrufen, 0 als den Eigenwert dieser Reihen festzusetzen, in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Regel, dass die Binomreihe im Zweideutigkeitsfalle, wo eine Reihe von lauter reellen und eindeutigen Gliedern einem zweideutigen und komplexen Wert der Potenz entsprechen sollte, nur ihren reellen Teil angiebt und diesen als Eigenwert hat.

Nimmt man dagegen a negativ, und $a = -1$ ist ein gutes Beispiel hierfür, zeigen sich die Vorzüge der Multiplikations-Methode in der starken Halbkonvergenz der aller besten Art, wo steter Vorzeichenwechsel das Minimalglied begleitet. Nimmt man $a = -2$, werden die Bedingungen der Halbkonvergenz hart, die Grenz-Quote ist dann nur $\frac{1}{8}$; von der Reihe

$$129140163 = (1+8)^{\frac{17}{2}} =$$

$$\begin{array}{rrr}
1 & +2800512 & -9957376 \\
+68 & +13069056 & +10862592 \\
+2040 & +37340160 & -18104320 \\
+35360 & +56010240 & +38993920 \\
+388960 & +24893440 & \text{u. s. w.}
\end{array}$$

aber bekommt man doch unmittelbar zwei Ziffern richtig bestimmt, wenn man unmittelbar vor oder nach dem 11ten, minimalen, Glied aufhört. Und wendet man ferner die drei zuletzt aufgegebenen Glieder zum zweimaligen Multipliziren mit $(1+8)$ an und zum einmaligen mit $(1+1)$, findet man nach (222)

$$s'_{14} = s_{11} + \frac{1}{162}(98u_{12} + 18u_{13} + u_{14}) = 129382771$$

mit 3 richtigen Ziffern.

Beispiel 2. Die bekannte Reihe der Logarithmenfunktion

$$\log(1-z) = -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \ldots,$$

welche durch $q_\infty = z^{-1}$, $q'_\infty = 1$ und $q''_n = -1$ charakterisirt wird, wird durch die Multiplikations-Methode verbessert und giebt:

$$(z-1)\log(1-z) = \frac{z}{1}-\frac{z^2}{1\cdot 2}-\frac{z^3}{2\cdot 3}-\frac{z^4}{3\cdot 4}-\frac{z^5}{4\cdot 5}-\cdots$$

$$(z-1)^2\log(1-z) = -\frac{z}{1}+\frac{3z^2}{1\cdot 2}-\frac{2z^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{2z^4}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{2z^5}{3\cdot 4\cdot 5}-\cdots$$

$$(z-1)^3\log(1-z) = \frac{z}{1}-\frac{5z^2}{1\cdot 2}+\frac{11z^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{6z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{6z^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots$$

Das Gesetz für die höheren Glieder dieser Reihen ist klar genug, um aber die Anfangsglieder zu verstehen, muss man, nach jeder durchgeführten Multiplikation mit $z-1$, das Produkt formell mit demselben Faktor dividiren. So bekommt man durch r Multiplikationen:

$$\log(1-z) = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{1}{m}\left(\frac{z}{z-1}\right)^m - \frac{(r)!\,z^{r+1}}{(z-1)^r}\sum_{n=1}^{n=\infty} z^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n+r)!}$$

oder

$$\log(1-z) = \frac{z}{z-1}\left(1+\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}\left(1+\frac{2}{3}\frac{z}{z-1}\left(1+\ldots+\frac{r-1}{r}\frac{z}{z-1}\right)\right)\right)+$$
$$-\frac{z^{r+1}}{(r+1)(z-1)^r}\left(1+\frac{1\cdot z}{r+2}\left(1+\frac{2z}{r+3}\left(1+\ldots+\frac{(n-1)z}{r+n}\left(1+\ldots,\right.\right.\right.\right.$$

wo der unendliche Teil der Reihe durch

$$q_\infty = z^{-1}, \quad q'_\infty = r+1 \quad \text{und} \quad q''_n = -r-1$$

charakterisirt ist.

Die ersten r Glieder dagegen sind, wie man sieht, der Anfang der Reihe für $-\log\left(1-\frac{z}{z-1}\right) = \log(1-z)$. In den Fällen, wo z negativ ist, ist diese Reihe, wenn die Multiplikations-Methode bis ins Unendliche fortgesetzt wird, konvergent, auch wenn die ursprüngliche divergent war. Ist z positiv und grösser als 1, sodass von einem Logarithmus einer negativen Zahl die Rede ist, ist auch die multiplizirte Reihe divergent mit dem Verhältnis der Binomreihe stimmend.

Wie viele richtige Dezimalen für log 2, log 3, log 5 und log 7 kann man so mittelst der 10 ersten Glieder der Reihen finden?

Beispiel 3. Die Arctangens-Reihe $\operatorname{arctang} x = \frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots$, welche durch $q_\infty = -x^{-2}$, $q'_\infty = 1$ und $q''_\infty = -\frac{1}{2}$ charakterisirt wird, wird durch die Multiplikations-Methode verbessert und giebt:

$$(1+x^2)\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1}+\frac{2x^3}{1\cdot 3}-\frac{2x^5}{3\cdot 5}+\frac{2x^7}{5\cdot 7}-\frac{2x^9}{7\cdot 9}+\cdots$$

$$(1+x^2)^2\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1}+\frac{5x^3}{1\cdot 3}+\frac{8x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{8x^7}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{8x^9}{5\cdot 7\cdot 9}-\cdots$$

$$(1+x^2)^3\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1}+\frac{8x^3}{1\cdot 3}+\frac{33x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{48x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}-\frac{48x^9}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots \text{ u. s. w.}$$

Das allgemeine Gesetz für die Anfangsglieder dieser Reihen ist hier nicht klar, wird aber offenbar, wenn man nach jeder durchgeführten Multiplikation mit $(1+x^2)$ formell denselben Faktor wegdividirt. So findet man

$$\operatorname{arc\,tang} x = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{2^{2m-2}(m-1)!^2}{(2m-1)!} \frac{x^{2m-1}}{(1+x^2)^m} +$$

$$+ \frac{2^{2r}(r)!}{(1+x^2)^r} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+r-1)!\,(2n-2)!}{(n-1)!\,(2n+2r-1)!} x^{2n+2r-1},$$

was auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1+x^2}\left(1+\frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2}\left(1+\ldots+\frac{2r-2}{2r-1}\frac{x^2}{1+x^2}\right)\right) +$$

$$+ \frac{2^{2r}(r\,!)^2}{(2r+1)!} \frac{x^{2r+1}}{(1+x^2)^r}\left(1-\frac{1x^2}{2r+3}\left(1-\frac{3x^2}{2r+5}\left(1-\ldots-\frac{2n-1}{2r+2n-1}x^2\left(1-\ldots\right.\right.\right.\right.$$

In den ersten Teilen dieser Reihen erkennen wir den endlichen Anfang der Arcsinus Reihe (§ 19) wieder. Die unendlichen Fortsetzungen, welche also die Restglieder dieser Reihe geben, sind für endliche reelle Werte von x nicht nur gut halbkonvergent, sondern ausserdem mit einem Faktor multiplizirt, welcher mit wachsendem r abnimmt. Diese Reihen werden durch

$$q_\infty = -x^{-2}, \quad q'_\infty = r+1 \quad \text{und} \quad q''_n = -\frac{2r+1}{2}$$

charakterisirt.

Berechne die Werte von $\frac{\pi}{4}$ mittelst der spätkonvergenten Reihe für $x=1$, und von $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ mittelst der divergenten Reihe für $x^2=3$.

§ 50. Die Subtraktions-Methode.

Wenn nur die Reihe, welche man zu verbessern wünscht, bestimmte endliche Werte für die Grenz-Quote und den Grenz-Charakter hat, wird man Reihen mit bekanntem Eigenwert nicht vermissen, welche durch Subtraktion von der vorgelegten, eine Reihe mit verbesserten Konvergenz-Verhältnissen als Rest geben können.

Im Allgemeinen wird eine Binomreihe mit derselben Grenz-Quote, q, und demselben Grenz-Charakter q' vorliegen,

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)^{q'-1} = 1+\frac{1-q'}{\underset{1\cdot q}{\cancel{1-q}}}\left(1+\frac{2-q'}{2q}\left(1+\ldots+\frac{n-q'}{nq}\left(1+\ldots\right.\right.\right.$$

Davon müssen jedoch erstens die Fälle ausgenommen werden, wo q positiv ist, und kleiner als 1, wo die Form $\left(1-\frac{1}{q}\right)^{q'-1}$ als Eigenwert dieser Reihe zweideutig

wird und durch ihren reellen Teil $\left(\frac{1}{q}-1\right)^{q'-1}\cos(q'-1)\pi$ ersetzt werden muss, wenn beabsichtigt wird, dass die vorgelegte Reihe eindeutig bestimmt sein soll.

Zweitens müssen die Fälle ausgenommen werden, wo q' eine ganze, positive Zahl ist, sodass die Binomreihe endlich wird. Gerade aber für diese Fälle haben wir durch die Multiplikations-Methode (§ 49, Beisp. 2 u. 3) in den Logarithmus- und Arctangens-Reihen Ersatz gefunden, welche nur in dem einen Fall versagt, wo $q=1$ und q' positiv und ganz ist. Dieses sind just die kritischsten Reihen und auf sie ist die Multiplikations-Methode unanwendbar.

Hier kommen uns aber die Reihen (41, 6) zu Hilfe. Diese Restgliedreihen bieten uns nicht nur eine Reihe jeder der Arten, deren wir hier bedürfen, sondern durch Summationen von Reihen ihrer Restglieder bekommt man die sehr allgemeine Gruppe von Reihen

$$\frac{(r-1)!\,(s-1)!\,(t-1)!}{(r+t-1)!\,(s+t-1)!}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(n+r-2)!\,(n+s-2)!}{(n+r+s+t-2)!\,(n-1)!}, \tag{223}$$

wo r, s und t positiv ganz sind.

Hier ist $q_\infty=1$, $q'_\infty=t+1$, $q''_\infty=-\frac{(r+t)(s+t)}{t+1}$ und $q'''_n=\frac{(r-1)(s-1)}{t+1}$, speziell für $s=1$ hat man $\frac{(r-1)!}{t(r+t-1)!}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(n+r-2)!}{(n+r+t-1)!}$, mit $q_\infty=1$, $q'_\infty=t+1$ und $q''_n=-(r+t)$; (41, 6) entsteht, indem noch $r=1$ hinzugefügt wird.

Da nun jede dieser Reihen durch Verschiebung einer endlichen Anzahl Plätze vorwärts oder rückwärts auf unendlich viele Weisen modifizirt werden kann unter Beibehalten von Grenz-Quote und Grenz-Charakter, jedoch mit Veränderung in den übrigen Charakteristiken, sind infolge (210) im Allgemeinen keine Schwierigkeiten damit verknüpft, Reihen darzustellen, welche mit der vorgelegten eine gewünschte Anzahl Charakteristiken gemein haben.

Es bleibt dann nur übrig, das Verhältnis $u_\infty : v_\infty$ zu finden, mit welchem die Subtrahend-Reihe multiplizirt werden muss, damit die Rest-Reihe die beabsichtigte Verbesserung der Konvergenz erlangen kann.

Dass sich der praktischen Ausführung Schwierigkeiten in den Weg stellen können, ist nicht zu verwundern. Wenn eine divergente Reihe weit davon entfernt ist, von selbst halbkonvergent zu sein, kann es unerreichbar sein, ihren Eigenwert zu berechnen.

Führt eine erste Anwendung der Subtraktions-Methode nicht so weit, dass der Eigenwert der Rest-Reihe unmittelbar oder durch die Multiplikations-Methode berechnet werden kann, wird man oft Schwierigkeiten haben, die Rest-Reihe auf exakte Weise zu charakterisiren. Dazu muss man dann die numerisch berechneten

Glieder dieser Reihe anwenden, indem man Werte $q_1, q_2, \ldots, q_n$ der Quote ausrechnet. Falls diese nicht deutlich und bestimmt eine Vergrösserung der Grenz-Quote andeuten, muss man im Allgemeinen annehmen, dass diese unverändert dieselbe ist, wie in der ursprünglich vorgelegten Reihe. Damit kann man dann nach $q'_n = n\left(1 - \frac{q_\infty}{q_n}\right)$ eine Tabelle über die ersten Werte des Charakters berechnen. In dieser Tabelle gilt es nun zu $n = \infty$ zu extrapolieren, um den Grenz-Charakter zu finden. Dazu muss man reziproke Differenzen anwenden; und sehr häufig wird man wie in § 40 Beisp. 3 rechnen können, nämlich, wenn ein Bruch mit Zähler und Nenner 1sten Grades den assymptotischen Verlauf der Tabelle wiedergeben kann. Mit dem gefundenen Wert für q'_∞ kann man dann $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ berechnen und mit diesen in derselben Weise zu q''_∞ extrapolieren. Aehnliche Extrapolation wird dann auch zur Bestimmung des Faktors des neuen Subtrahenden,

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} (u_n : v_n)$$

anzuwenden sein.

Ist die Verbesserung der Reihe so weit erschöpft, dass man jedenfalls keine ferneren Glieder berechnen will, hat man zum Abschluss nur die letzte Subtrahend-Reihe nach ihrer Grenz-Quote und ihrem Grenz-Charakter zu wählen, ihre Verschiebung auf eine ganze Anzahl von Plätzen zu schätzen, und dann den Faktor $u_n : v_n$ anzuwenden, um das letzte Glied der Rest-Reihe auf 0 herabzubringen. (Siehe Beispiel 1.)

Die Beispiele, welche die Subtraktions-Methode jetzt veranschaulichen sollen, wähle ich aus solchen langsam konvergenten Reihen, wo $q_\infty = 1$, und diese Methode die einzig anwendbare ist.

Diese Reihen entnehme ich den stattgehabten Untersuchungen, anlässlich des im § 30 erwähnten Problems, Bestimmungen des mittleren Fehlers für Differentialquotienten mittelst einer äquidistanten Tabelle von $-\infty$ bis $+\infty$ für eine Funktion, deren Tafelwerte unter einander frei und mit dem mittleren Fehler $= 1$ gegeben sind.

Für den Differentialquotienten, welcher demselben Argument wie einer der Funktionswerte der Tabelle entspricht, hat man folgenden linearen Ausdruck mittelst der übrigen Funktionswerte

$$D = \sum_{-\infty}^{+\infty} H_s E^s ,$$

wo der Koeffizient $H_0 = 0$ und

$$H_s = (-1)^{s-1} \cdot s \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(n+s-2)!^2}{(n+2s-1)!\,(n-1)!} = \frac{(-1)^{s-1}}{s} . \qquad (224)$$

Diese Reihen sind nämlich spezielle Fälle von (223) mit $r = s$ und $t = 1$. Die Doppel-Reihe für D ist der Ausdruck für die symbolische Identität

$$D = \log E = \log(1+E) - \log(1+E^{-1}).$$

Für das Quadrat des mittleren Fehlers bekommt man deshalb

$$\lambda_2(D) = 2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{3},$$

vergl. diesbezüglich Beispiel 2.

Die Bestimmung des Differentialquotienten für die Mitte eines der Intervalle der Tabelle geschieht durch

$$D = \sum_{-\infty}^{+\infty} K_{\frac{2v+1}{2}} E^{-\frac{2v+1}{2}},$$

wo

$$K_{\frac{2v+1}{2}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^v (2n+2v-3)!^2}{2^{4n+4v-6}(n+v-2)!^2 (n+2v)!(n-1)!},$$

wo doch für $v = 0$ das erste Glied in $K_{\frac{1}{2}}$ als $= 1$ zu verstehen ist.

Durch Umwandlung in unendliche Produkte und durch Vergleich mit Wallis' Produkt findet man:

$$K_{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 4}\left(1 + \frac{9}{4\cdot 6}\left(1 + \frac{25}{6\cdot 8}\left(1 + \ldots = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\ldots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\ldots} = \frac{4}{\pi},\right.\right.\right.$$

$$K_{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\cdot 6}\left(1 + \frac{9}{2\cdot 8}\left(1 + \frac{25}{4\cdot 10}\left(1 + \ldots = -\frac{1}{4\cdot 6}\cdot\frac{1\cdot 1\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 4\cdot 10} = -\frac{4}{9\pi},\right.\right.\right.$$

$$K_{\frac{5}{2}} = \frac{1\cdot 9}{4.6.8.10}\left(1 + \frac{25}{2\cdot 12}\left(1 + \frac{49}{4\cdot 14}\left(1 + \ldots = \frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\;\frac{3\cdot 3\cdot 7\cdot 7}{2\cdot 12} = \frac{4}{25\pi},\right.\right.\right.$$

also

$$D = \frac{4}{\pi}\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{9}\left(E^{\frac{3}{2}} - E^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{25}\left(E^{\frac{5}{2}} - E^{-\frac{5}{2}}\right) + \ldots + \frac{(-1)^v}{(2v+1)^2}\left(E^{\frac{2v+1}{2}} - E^{-\frac{2v+1}{2}}\right) + \ldots,\right.$$

folglich für das Quadrat des mittleren Fehlers

$$\lambda_2(D) = \frac{32}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots + \frac{1}{(2v+1)^4} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Hier sind mithin Reihen genug, bei denen man untersuchen kann, inwiefern ihre Eigenwerte mit den angegebenen (beabsichtigten) Werten übereinstimmen.

Beispiel 1. Die Reihe

$$K_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2\cdot 4}\left(1 + \frac{9}{4\cdot 6}\left(1 + \ldots \frac{(2n-1)^2}{4n(n+1)}\left(1 + \ldots\right.\right.\right.$$

wird durch $q_\infty = 1$, $q'_\infty = 2$, $q''_\infty = -\frac{9}{8}$ und $q'''_n = \frac{1}{8}$ charakterisirt.

Unter den Reihen (41, 6) kann die erste, welche mit A bezeichnet wird, mit ihren Verschiebungen B, C und D zur Darstellung einer Subtrahend-Reihe angewandt werden. Man hat

$$A = 1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \quad q_\infty = 1,\ q'_\infty = 2,\ q''_n = -2,$$

$$B = 1 = 0 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots \quad q_\infty = 1,\ q'_\infty = 2,\ q''_n = -1,$$

$$C = 1 = 0 + 0 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \ldots \quad q_\infty = 1,\ q'_\infty = 2,\ q''_n = 0,$$

$$D = 1 = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)} + \ldots \quad q_\infty = 1,\ q'_\infty = 2,\ q''_n = 1.$$

Indem man $q_\infty = 1$ und $q'_\infty = 2$ behält, jedoch nun mit $q''_\infty = -\frac{9}{8}$, bekommt man hieraus die Reihen

$$A + 7B \text{ mit Eigenwert } = 8 \text{ und wo } q'''_\infty = -\frac{7}{24},$$

$$9B - 1C \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}\ 8 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad q'''_\infty = \frac{9}{24},$$

$$17C - 9D \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}\ 8 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad q'''_\infty = \frac{153}{24}.$$

Der Forderung $q'''_\infty = \frac{1}{8}$ wird durch die Reihen

$$3A + 66B - 5C \text{ mit Eigenwert } 64 \text{ und wo } q^{IV}_\infty = \frac{23}{4},$$

$$75B - 14C + 3D \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 64 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad q^{IV}_\infty = -\frac{25}{4},$$

Genüge getan.

Und endlich bekommt man in der Reihe

$$25A + 1125B - 149C + 23D \text{ mit Eigenwert } 1024$$

$$q_n = \frac{128n^4 - 288n^3 - 860n^2 + 1281n + 1650}{128n^4 - 544n^3 + 4n^2 + 2065n - 1911}, \quad q_\infty = 1,$$

$$q'_n = \frac{256n^4 - 864n^3 - 784n^2 + 3561n}{128n^4 - 288n^3 - 860n^2 + 1281n + 1650}, \quad q'_\infty = 2,$$

$$q''_n = \frac{-288n^3 + 936n^2 + 999n - 3300}{256n^3 - 864n^2 - 784n + 3561}, \quad q''_\infty = -\frac{9}{8},$$

$$q'''_n = \frac{96n^3 - 312n^2 - 1883n}{768n^3 - 2496n^2 - 2664n + 8800}, \quad q'''_\infty = \frac{1}{8},$$

$$q^{IV}_n = \frac{-1550n - 1100}{96n^2 - 312n - 1883}, \quad q^{IV}_\infty = 0,$$

Die Uebereinstimmung mit der vorgelegten Reihe ist ja nicht vollständig, dazu wäre erforderlich, dass nicht nur $q^{IV}_\infty = 0$, sondern $q^{IV}_n = 0$ ohne Rücksicht auf die Ordnungszahl gälte.

Bei der einfachen Anwendung von (210) kann man durch mehrere Verschie-
ungen von (41, 6) nicht weiter gelangen. Es sei denn, dass man die Methode nodifizirte, was zwar mittelst (211) getan werden kann, hier aber nicht nötig ist.

Da π das Verhältnis der unendlich fernen Glieder in den Reihen A, B, C und D u den entsprechenden Gliedern der vorgelegten Reihe ist, wird unsere Subtrahend-
leihe

$$\Sigma v_n = \frac{25A + 1125B - 149C + 23D}{1024\pi}.$$

Hierbei ist indess $\frac{1}{\pi}$ als bestimmt vorausgesetzt durch Wallis' unendliches rodukt oder gerade durch die gesuchte Reihe. Man muss sich deshalb am liebten die Rechnung durch successiv verbesserte Hypothesen über den Faktor zur ubtrahendreihe ausgeführt denken, um aber Umschweife zu vermeiden, wähle ich ier mit grosser Annäherung

$$\frac{1}{1024\pi} = \cdot 0003108495 ,$$

velches somit auch die Totalsumme der ersten subtrahirten Reihe giebt.

Die vorgelegte Reihe giebt wohl gleich eine oder ein paar richtige Dezimalen, anach wird aber die Konvergenz so langsam, dass zur unmittelbaren Berechnung on 7 richtigen Dezimalen nahezu eine Million Glieder angewandt werden müssten. erechnet man aber die Glieder der Subtrahendreihe in der angegebenen Weise, vird die Reihe $\Sigma(u_n - v_n)$ so stark konvergent, dass die 7-ziffrige Genauigkeit durch ummation von nahezu 20 ihrer ersten Glieder erlangt wird, so wie aus folgender abelle zu ersehen ist.

n	u_n	v_n	w_n	$u_n - v_n - w_n$
1	1	·003 885 618 750	·0	·996 114 381 250
2	·125	·176 148 050 000	·0	—·051 148 050 000
3	·046 875	·035 773 596 625	·0	+·011 101 403 375
4	·024 414 062 5	·025 386 042 500	—·000 382 099 264	—·000 589 880 736
5	·014 953 616 281	·015 076 200 750	— 199 360 773	+·000 076 773 304
6	·010 093 688 965	·010 121 851 814	— 34 328 569	+ 6 165 719
7	·007 269 859 314	·007 278 689 066	— 9 719 342	+ 889 590
8	·005 484 849 215	·005 488 220 617	— 3 543 034	+ 171 632
9	·004 285 038 449	·004 286 515 923	— 1 516 460	+ 38 986
10	·003 439 933 644	·003 440 650 923	— 726 894	+ 9 614
11	·002 822 309 194	·002 822 686 154	— 379 352	+ 2 391
12	·002 357 269 611	·002 357 480 676	— 211 607	+ 542
13	·001 998 390 423	·001 998 514 889	— 124 554	+ 88
14	·001 715 651 119	·001 715 727 760	— 76 641	0
15	·001 488 940 078	·001 488 989 031	— 48 953	0
Σ	1·253 502 979 340	·298 573 241 292	—·000 632 249 314	·955 561 905 771

Noch ein paar richtige Dezimalen können nun durch die Multiplikations-Methode gewonnen werden, indem diese auf q_{15} anstatt auf q_∞ basirt wird. Noch weiter gelangt man jedoch, wenn man abermals die Subtraktions-Methode auf die Rest-Reihe $\Sigma(u_n - v_n)$ anwendet.

Um diese zu charakterisiren, brauchen wir die Glieder von $n = 8$ bis $n = 15$, welche wir mit 10^6 multiplizirt, in der 2ten Kolonne der folgenden Tabelle anführen:

n	$10^6(u_n - v_n)$	$\frac{1}{q_n}$	q'_n	$\rho(q'_n)$	$\rho''(q'_n)$	$\frac{1}{q'_\infty - q'_n}$
8	3371402	·438237	4·49410			·6640
				7·320		
9	1477474	·485477	4·63071		6·000	·7303
				8·781		
10	717279	·525548	4·74458		5·999	·7965
				10·376		
11	376960	·559913	4·84096		6·001	·8628
				12·101		
12	211065	·589700	4·92360		5·989	·9290
				13·979		
13	124466	·615759	4·99513		5·997	·9952
				15·974		
14	76641	·638733	5·05773			1·0613
15	48953					

Mit diesen findet man die reziproken Quoten in der 3ten Kolonne berechnet. Es wird fortdauernd vorausgesetzt, dass die Grenz-Quote = 1 ist. Daraus folgen dann die in der 4ten Kolonne angegebenen Charaktere und in der 5ten und 6ten Kolonne deren reziproke Differenzen der 1sten und 2ten Ordnung.

Mit Bezugnahme auf § 40, Beispiel 3 unterliegt es keinem grossen Zweifel, dass der Grenz-Charakter genau $q'_\infty = 6$ ist. Ferner zeigen sich dann die Zahlen in der 7ten Kolonne als eine fast lineare Funktion mit der Differenz ·6618 und für den Charakter findet man dann die Annäherungsformel

$$q'_n = 6\,\frac{n - {\cdot}481}{n + 2{\cdot}037}\,.$$

Danach muss dann $q''_\infty = -2{\cdot}52$ und $q'''_\infty = {\cdot}48$. Die Subtraktion von Σv_n hat also den Grenz-Charakter um 4 Einheiten verbessert, und wahrscheinlich würde Subtraktion einer neuen Reihe mit $q_\infty = 1$, $q'_\infty = 6$, $q''_\infty = -2{\cdot}5$ und $q'''_\infty = 0{\cdot}5$ eine weitere Verbesserung um 2 bis 3 Einheiten herbeiführen. Unsicher ist dies jedoch wegen der Multiplikation von Σv_n mit einem nicht ganz richtigen Wert für $\frac{1}{\pi}$. Da die Reihe (41, 6) mit $q'_\infty = 6$ die Charakteristike $q''_\infty = -6$ hat, müsste solch' ein neuer Subtrahend einer positiven Verschiebung über Plätze von 3·5 Glieder unter-

worfen werden. Ein Solcher kann als Mittelzahl einer 3-Glieder verschobenen und einer 4-Glieder verschobenen Reihe gebildet werden.

Anstatt dessen aber soll hier ein Abschluss gezeigt werden, welcher das 14te und 15te Glied genau berücksichtigt. Als 2ten Subtrahenden müssen wir dann die Reihe

$$\Sigma w_n = -\cdot 2751114702336 \sum_{n=4}^{n=\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)} +$$
$$-\cdot 104238117984 \sum_{n=5}^{n=\infty} \frac{1}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)},$$

brauchen, deren Summe $-\cdot 000632249314$ ist. Es sind die Zahlenwerte der 15 ersten Glieder dieser Reihe, welche in der 4ten Kolonne der ersten obigen Tabelle angegeben stehen, in der 5ten Kolonne stehen die Reste $u_n - v_n - w_n$ nach beiden Subtraktionen. Durch Addition findet man dann das Resultat:

$$\begin{aligned} \Sigma v_n &= \frac{1}{\pi} = \cdot 318\,309\,888\,000, \\ \Sigma w_n &= -\cdot 000\,632\,249\,314, \\ \underline{\Sigma(u_n - v_n - w_n)} &= \underline{\cdot 955\,561\,905\,757,} \\ \Sigma u_n &= \frac{4}{\pi} = 1\cdot 273\,239\,544\,443, \end{aligned}$$

welches mit 9 ganz richtigen Dezimalen einen niedrigeren Grenzwert für $\frac{1}{\pi}$ giebt. In $\Sigma(u_n - v_n - w_n)$ haben nämlich vom 16ten Glied an alle höheren Glieder kleine positive Werte. Falls man dieses Resultat anstatt des weniger genauen Faktors $\frac{1}{\pi}$ des 1sten Subtrahenden einsetzt, wird eine erneute Rechnung noch stärkere Annäherung geben.

Beispiel 2. Die Reihe $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$, welche durch $q_\infty = 1$, $q'_\infty = 2$, $q''_\infty = -\frac{3}{2}$, $q'''_\infty = \frac{1}{6}$, $q^{IV}_n = -\frac{2}{3}$ charakterisirt wird, kann durch wiederholte Anwendung der Subtraktions-Methode in eine Summe von zwei schnell konvergenten Reihen umgewandelt werden.

Wenn u_n, wie hier eine gerade, negative Potenz von n ist, und dies ebenfalls in den successive entstehenden Rest-Reihen der Fall ist, liegt es nahe, Subtrahenden anzuwenden, wo $v_n = \frac{1}{(n^2-1)\ldots(n^2-p^2)}$. Diese können nämlich von (223) abgeleitet werden, indem man erst $r=1$, $s=1$ und $t=2p$ setzt, wobei

$$\frac{1}{2p(2p)!} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(n-1)!}{(n+2p)!}$$

gefunden wird, alsdann setzt man

$$r=1, \quad s=2 \quad \text{und} \quad t=2p-1,$$

woraus

$$\frac{1}{(2p-1)(2p)!}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(n)!}{(n+2p)!}$$

entsteht, schliesslich wenn ersteres mit p multiplizirt und zu letzterem addirt wird, bekommt man

$$\frac{2p+1}{(4p-2)(2p)!}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(n+p)(n-1)!}{(n+2p)!}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{((n+p)^2-1)\ldots((n+p)^2-p^2)}.$$

In diesen Reihen nähern die unendlich fernen Glieder derselben Ordnung sich untereinander der Identität.

Die Rechnung stellt sich mithin folgendermassen:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\frac{\pi^2}{6} & = 1+ & \frac{1}{4} + & \frac{1}{9} + & \frac{1}{16} + & \frac{1}{25} & +\ldots+ & \frac{1}{n^2} + \\
-\frac{3}{4} & = - & \frac{1}{1\cdot 3} - & \frac{1}{2\cdot 4} - & \frac{1}{3\cdot 5} - & \frac{1}{4\cdot 6} & -\ldots- & \frac{1}{n^2-1} - \\
\frac{5}{6\cdot 24} & = & & \frac{1}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5} + & \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + & \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} & +\ldots+ & \frac{(1)!^2(n-3)!(n)!}{(n-1)!(n+2)!} \\
\frac{-28}{10\cdot 720} & = & & & -\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7} - & \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8} & -\ldots- & \frac{(2)!^2(n-4)!(n)!}{(n-1)!(n+3)!} \\
\frac{324}{14\cdot 40320} & = & & & & \frac{36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} & +\ldots+ & \frac{(3)!^2(n-5)!(n)!}{(n-1)!(n+4)!} \\
\text{Die Summe} & = 1- & \frac{1}{1\cdot 4\cdot 3} + & \frac{4}{1\cdot 2\cdot 9\cdot 4\cdot 5} - & \frac{4\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 16\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + & \frac{4\cdot 9\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 25\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} & -\ldots- & \frac{(-1)^n(n-1)!^3}{(n)!(2n-1)!}.
\end{array}$$

Also ist

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!^3}{n!(2n-1)!}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2n+1}{4n-2}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}.$$

Von diesen Reihen ist die erste durch

$$q_\infty=-4, \quad q'_\infty=\frac{3}{2}, \quad q''_\infty=-\frac{7}{6}, \quad \ldots$$

charakterisirt, die zweite durch

$$q_\infty=-4, \quad q'_\infty=\frac{3}{2}, \quad q''_\infty=-\frac{1}{2}, \quad \ldots$$

sie sind also in gleich starkem Grade konvergent, mit 10 Gliedern von jeder bekommt man 7 bis 8 richtige Ziffern.